Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **WS 17/18**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 21.12.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 9

Aufgabe 1. Es sei X eine nichtleere Menge und

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases} \qquad \text{für } x, y \in X.$$

(a) Zeigen Sie: d definiert einen Abstand auf X.

(b) Beschreiben Sie die offenen Kugeln $K_\epsilon(x)$ in (X,d). Welche Teilmengen von (X,d) sind offen, welche abgeschlossen?

(c) Wann konvergiert eine Folge in (X,d)?

Aufgabe 2. (a) Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $x,y \in X$. Zeigen Sie:

$$d'(x,y) = 1 - \frac{1}{1+d(x,y)}$$

definiert einen weiteren Abstand auf X.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß für $a,b \geq 0$ gilt $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+a+b} \leq 1$.

(b) Geben Sie eine Familie $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Intervalle $J_n \subseteq \mathbb{R}$ an, so daß $\bigcap_{i=0}^{\infty} J_n = [0,1]$ abgeschlossen ist.
Geben Sie eine Familie $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Intervalle $I_n \subseteq \mathbb{R}$ an, so daß $\bigcup_{i=0}^{\infty} I_n =]0,1[$ offen ist.
Hinweis: Die Beispiele zeigen, daß Durchschnitte beliebig vieler offener Mengen nicht offen und Vereinigungen beliebig vieler abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen sein müssen.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie zu $\epsilon = \frac{1}{2018}$ ein $\delta > 0$ (mit Begründung!), so daß

(a) $\left|\frac{1}{x^2-3x+3} - 1\right| < \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < \delta$

(b) $f(K_\delta((0,0))) \subseteq K_\epsilon(f((0,0)))$ für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f((x,y)) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, daß die auf (X,d) Lipschitz-stetigen Funktionen einen Vektorraum bilden, auf dem durch

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x,y\in X, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}$$

eine Norm erklärt wird.
Weshalb darf der erste Teil $\sup_{x\in X} |f(x)|$ nicht weggelassen werden?

(b) Zeigen Sie (jeweils mit dem Standard-Abstand auf $\mathbb{R}$):

i) $f(x) = x^2$ ist Lipschitz-stetig auf $X = [0, 1]$, aber nicht auf $X = \mathbb{R}$.

ii) $f(x) = \sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-stetig auf $[0, 1]$.