Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 2018/19

Probeklausur zur Mathematik für Physiker III

Vorbemerkungen:

- Zur Teilnahme an der Klausur am 28.1.2019 ist eine Anmeldung im QISPOS (Modulabschlußprüfung) und eine erfolgreiche Teilnahme an den Übungen erforderlich.
- Es gibt keine Anmeldung im Kursbuchungssystem mehr. Um die Hörsäle M1,M2 gleichmäßig zu füllen, wäre es sinnvoll, wenn Sie die Klausur im selben Hörsaal schreiben wie im letzten Semester.
- Auf dem Deckblatt wird es eine Art Datenschutzverzichtserklärung geben, mit der Sie sich einverstanden erklären, daß Ihre Daten [Name, Matrikelnummer, erreichte Punktzahl, Note, Erfolg in den Übungen] im Fachbereich Mathematik und Informatik gespeichert und vor dem 31.3.2029 nicht gelöscht werden. Ohne eine entsprechende Unterschrift wird die Klausur nicht korrigiert.
- Die Klausurergebnisse werden in einem verschlüsselten pdf veröffentlicht. Das Paßwort steht während der Klausur an der Tafel.
- Die Klausureinsicht für die 1. Klausur ist am 30.1.2019 von 9h15 bis 10h00 im N3.
- Zur Teilnahme an der 2. Klausur am 28.3.2019 ist ebenfalls eine QISPOS-Anmeldung erforderlich. Falls die 1. Klausur mitgeschrieben und nicht bestanden wurde, kann diese Anmeldung erst ab Eintrag der Ergebnisse der 1. Klausur erfolgen, also erst einige Tage nach Klausureinsicht.
- Die folgenden Aufgaben waren Klausuraufgaben im WS 2016/17.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausuren werden zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Insbesondere sind Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Papier (A4) bringen Sie bitte selbst mit. Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite (nicht neues Blatt) begonnen werden.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Die Probeklausur wird am 21.1.2019 ab 16h15 Im M5 vorgerechnet.

Aufgabe 1. (a) Es sei $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Bestimmen Sie alle Kandidaten für lokale Extrema von F und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima, lokale Minima oder sonstiges handelt.

(b) Begründen Sie, daß in Umgebungen von Punkten (x, y), die von den in (a) bestimmten Kandidaten verschieden sind, durch $F(x, y) = 0$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^2$ erklärt wird. Bestimmen Sie für alle $(x, y) \in M$ den Tangentialraum und den Normalenvektorraum in (x, y).

Aufgabe 2. Gegeben sei das Anfangswertproblem $x'(t) = \frac{\sqrt{1+t}}{e^{x(t)}+1}$, $x(0) = 0$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung in impliziter Form $F(t, x(t)) = 0$.

(b) Begründen Sie, daß es eine eindeutige differenzierbare Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x(0) = 0$ von $F(t, x(t)) = 0$ gibt.

(c) Geben Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung von $x(t)$ in $t = 0$ an.

Aufgabe 3. (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \sinh t$.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y \sin x + y^2 + (2xy - \cos x)y'(x) = 0$ mit $y(0) = 1$ in einer geeigneten Umgebung der Anfangsbedingung.

Aufgabe 4. (a) Berechnen Sie $\mathrm{res}_{\mathrm{i}} f$ für $f(z) = \frac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\cos^2 x}{x^2 + 1}$.

Bemerkungen: Hier sind Begründungen zu geben, daß die gewählte Integrationsmethode zulässig ist. Denken Sie an Doppelwinkelformeln.

Aufgabe 5 Die Viertelastroide ist definiert als $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x, y \geq 0 \ , \ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\}$. Berechnen Sie, z.B. mit der Transformation $x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} u_1(1 - u_2)$ und $y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} u_1 u_2$:

(a) den Flächeninhalt $v_2(A)$ von A,

(b) den Schwerpunkt (s_x, s_y) von A,

(c) den Umfang $L(\partial A)$ von A.

Hinweise: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. Erwartet wird eine Darstellung aller Ergebnisse in der Form $r\pi^s a^t$ mit $r, s, t \in \mathbb{Q}$.