Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **WS 19/20**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 7.11.2019 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 4

Aufgabe 1. Überprüfen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme eine Lösung besitzen und geben Sie diese ggf. an.

(a)
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2, \\ 3x - 1y + 2z &= 5, \\ -x - 8y + 11z &= 1, \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} (1+\mathrm{i})z + \mathrm{i}5w &= 1, \\ (1-\mathrm{i})z + 3w &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Es sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: (v_1, v_2, v_3) ist Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit $w = \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i$.

(c) Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_2, v_3)$?

Aufgabe 3. Welche der folgenden Teilmengen $V_1, \ldots, V_4$ des $\mathbb{R}^3$ ist ein Untervektorraum?

$$V_1 := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\big\}, \qquad V_2 := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\big\},$$
$$V_3 := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\big\}, \quad V_4 := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 7z = 0\big\}.$$

Aufgabe 4. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ heißt *symmetrisch*, falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$, und *schief-symmetrisch*, falls $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

(a) Zeigen Sie, daß alle symmetrischen bzw. alle schief-symmetrischen Matrizen je einen Untervektorraum von $M(n \times n, K)$ bilden, und bestimmen Sie dessen Dimension.

(b) Zeigen Sie, daß es für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$ genau eine symmetrische Matrix A_+ und eine schief-symmetrische Matrix A_- gibt mit $A = A_+ + A_-$.