Kap. 2 L

<u>Definition</u> 2.1 (Wh.) Sei M eine transitive Menge. Dann bezeichnet $\mathrm{Def}(M)$ die Menge aller

$$\{x \in M : M \models \varphi[\beta(v_0|x)]\}$$

für Formeln φ und M-Belegungen β (d.h. $\mathrm{Def}(M)$ ist die Menge aller über M mit Hilfe von Parametern aus M definierbaren Teilmengen von M).

<u>Definition</u> 2.2 $L_0 = \emptyset$, $L_1 = \{\emptyset\}$, $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$ für $\alpha > 1$, und $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ für Limesordinalzahlen λ. Wir schreiben L für $\bigcup_\alpha L_\alpha$.

L ist Gödels Konstruktibles Universum. Gödel hat u.a. gezeigt, daß $L \models ZFC$ (unter der Annahme, daß $V \models ZF$), sowie daß L Modell der Verallgemeinerten Kontinuumshypothese ist (d.h. $L \models \forall\alpha\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$). Wir wollen dies und noch eine andere tiefgehende von R. Jensen bewiesene Aussage im folgenden zeigen.

<u>Lemma</u> 2.3 Jedes L_α ist transitiv, und $\beta \leq \alpha$ $\Rightarrow L_\beta \subset L_\alpha$.

Beweis: Wir zeigen dies (simultan) durch Induktion nach α.

Sei $x \in y \in L_\alpha$; insbesondere $\alpha > 1$! Wenn α Limeszahl ist, dann ex. $\bar{\alpha} < \alpha$ mit $y \in L_{\bar{\alpha}}$. Mit Ind. vor. ist dann $x \in L_{\bar{\alpha}}$, also $x \in L_\alpha$.

Sei nun $\alpha = \bar{\alpha} + 1$. Dann ist $y \in \mathrm{Def}(L_{\bar{\alpha}})$, also $x \in L_{\bar{\alpha}}$. Damit ist

$$x = \{ y \in L_{\bar{\alpha}} : L_{\bar{\alpha}} \models v_0 \in v_1 [\beta(v_0|y)(v_1|x)] \}$$

$\in \mathrm{Def}(L_{\bar{\alpha}})$ (dies benutzt $x = x \cap L_{\bar{\alpha}}$, welches gilt, da $L_{\bar{\alpha}}$ induktiverweise transitiv ist), also $x \in L_\alpha$. L_α ist also transitiv.

Sei nun $\beta < \alpha$. Wenn α Limeszahl ist, dann gilt trivialerweise $L_\beta \subset L_\alpha$. Sei $\alpha = \bar{\alpha} + 1$. Dann ist $\beta \leq \bar{\alpha}$, also $L_\beta \subset L_{\bar{\alpha}}$ nach Induktionsvoraussetzung. Man zeigt aber wie im Beweis der Transitivität von L_α, daß $L_{\bar{\alpha}} \subset L_\alpha$; also $L_\beta \subset L_\alpha$. $\dashv$

Man verifiziert leicht, daß L_ω die Menge aller "erblich endlichen" Mengen ist, d.h.

$L_\omega = V_\omega$.

Schreibweise: OR bezeichnet die Klasse aller Ordinalzahlen.

<u>Lemma</u> 2.4 $L_\alpha \cap OR = \alpha$ für alle Ordinalzahlen α.

Beweis durch Induktion nach α: Sei zunächst α eine Limesordinalzahl. Wenn $\xi \in L_\alpha \cap OR$, dann $\xi \in L_{\bar\alpha} \cap OR$ für ein $\bar\alpha < \alpha$, also induktiverweise $\xi < \bar\alpha$, d.h. $\xi < \alpha$; somit $L_\alpha \cap OR \subset \alpha$. Wenn $\xi < \alpha$, dann $\xi < \bar\alpha$ für ein $\bar\alpha < \alpha$, und dann $\xi \in \bar\alpha = L_{\bar\alpha} \cap OR$ (Ind.!) $\subset L_\alpha \cap OR$. Somit $L_\alpha \cap OR = \alpha$.

Sei nun $\alpha = \bar\alpha + 1$. Sei $\xi \in L_\alpha \cap OR$, d.h. $\xi \in \mathrm{Def}(L_{\bar\alpha})$. Dann ist $\xi \subset L_{\bar\alpha} \cap OR = \bar\alpha$ (Ind.!), also $\xi \leq \bar\alpha$, d.h. $\xi < \alpha$. Somit $L_\alpha \cap OR \subset \alpha$.

Sei nun $\xi < \alpha$. Wenn $\xi < \bar\alpha$, dann $\xi \in L_{\bar\alpha}$ (Ind.!), also $\xi \in L_\alpha$ wegen 2.3. Andernfalls $\xi = \bar\alpha$. Doch dann gilt

$$\xi = \{x \in L_{\bar\alpha} : L_{\bar\alpha} \models v_0 \text{ ist Ordinalzahl}[\beta(v_0|x)]\},$$

da $L_{\bar\alpha} \cap OR = \bar\alpha$ (Ind.!), da $L_{\bar\alpha}$ transitiv ist, und da "v_0 ist Ordinalzahl" Σ_0 ist.

Also $\xi \in Def(L_{\bar\alpha}) = L_\alpha$. Somit $L_\alpha \cap OR = \alpha$.

$\dashv$

Konvention: Wir schreiben im folgenden $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ anstelle von $\varphi[\beta(v_0 | x_0) \dots (v_n | x_n)]$ etc.

<u>Lemma</u> 2.5 Sei α eine Limesordinalzahl. Dann ist L_α abgeschlossen bzgl. $x, y \mapsto \{x, y\}$.

Beweis: Seien $x, y \in L_\alpha$. Sei $\bar\alpha < \alpha$ so, daß $x \in L_{\bar\alpha}$ und $y \in L_{\bar\alpha}$. Dann ist

$$\{x, y\} = \{z \in L_{\bar\alpha} : L_{\bar\alpha} \models z = x \vee z = y\}^{*)}$$

$\in L_{\bar\alpha+1} \subset L_\alpha$.

$\dashv$

Bemerkung: Sei $\alpha = \bar\alpha + 1$. Dann ist L_α <u>nicht</u> abgeschlossen unter $x, y \mapsto \{x, y\}$. (Es gilt z.B. $\bar\alpha \in L_\alpha$, aber $\{\bar\alpha\} \notin L_\alpha$, da sonst $\bar\alpha \in L_{\bar\alpha}$ im Widerspruch zu 2.4.)

---

*) Im Sinne d. obigen Konvention ist also $L_{\bar\alpha} \models z = x \vee z = y$ kurz für $L_{\bar\alpha} \models v_0 = v_1 \vee v_0 = v_2 [\beta(v_0 | z)(v_1 | x)(v_2 | y)]$.

<u>Lemma</u> 2.6 Sei α beliebig. Dann ist L_α abgeschlossen bzgl. $x \longmapsto \bigcup x$.

Beweis: Sei $x \in L_\alpha$. Sei $\bar\alpha < \alpha$ und $x \in \mathrm{Def}(L_{\bar\alpha})$, etwa

$$x = \{ y \in L_{\bar\alpha} : L_{\bar\alpha} \models \varphi(y, \vec z) \},$$

wobei $\vec z \in L_{\bar\alpha}$. Da $L_{\bar\alpha}$ transitiv ist, gilt $\bigcup x \subset L_{\bar\alpha}$, und dann

$$\bigcup x = \{ u \in L_{\bar\alpha} : L_{\bar\alpha} \models \exists y (\varphi(y, \vec z) \wedge u \in y) \}$$

$\in \mathrm{Def}(L_{\bar\alpha}) \subset L_\alpha$. $\dashv$

Wir wollen nun zeigen, daß jedes L_α Modell von "Σ_0 - Komprehension" ist.

<u>Definition</u> 2.7 Sei $n \in \mathbb{N}$. Σ_n - <u>Komprehension</u> ist das folgende Schema:

Für jede Σ_n Formel φ, in der die Variablen $v_1, \dots, v_k$ frei vorkommen, gilt

$$\forall v_2 \dots \forall v_k \exists v_0 \forall v_1 (v_1 \in v_0 \leftrightarrow \varphi \wedge v_1 \in v_2)$$

Eine (transitive) Menge M ist Modell von Σ_n-Komprehension gdw. für alle Σ_n Formeln φ, in denen die Variablen $v_1, \ldots, v_k$ frei vorkommen, und für alle $x_2, \ldots, x_k \in M$ gilt :

$$M \models \exists v_0 \, \forall v_1 \, (v_1 \in v_0 \leftrightarrow \varphi(v_1, x_2, \ldots, x_k) \wedge v_1 \in x_2),$$

d.h. $\{ z \in x_2 : M \models \varphi(z, x_2, \ldots, x_k) \} \in M$.

Bemerkung : "Aussonderungsschema $=$ $\forall n$ Σ_n-Komprehension"

<u>Lemma</u> 2.8 Sei α beliebig, $\alpha > 0$. Dann ist L_α Modell ~~de~~ von Σ_0-Komprehension.

Beweis : Sei φ Σ_0, seien $z, x_2, \ldots, x_k \in L_\alpha$, und sei $\alpha \leq \beta$. Dann gilt $L_\alpha \models \varphi(z, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow$ $L_\beta \models \varphi(z, x_2, \ldots, x_k)$. (Vgl. 1.3.) Es ist daher leicht zu sehen, daß es genügt, 2.8 für den Fall $\alpha = \bar{\alpha} + 1$ zu zeigen.

Sei φ Σ_0, enthalte φ $v_1, \ldots, v_k$ frei, und seien $x_2, \ldots, x_k \in L_\alpha = \mathrm{Def}(L_{\bar{\alpha}})$. Für $\ell = 2, \ldots, k$ sei

$$x_\ell = \{ z \in L_{\bar{\alpha}} : L_{\bar{\alpha}} \models \varphi_\ell (z, z_1^\ell, \ldots, z_{i_\ell}^\ell) \},$$

wobei φ_ℓ eine Formel ist und $z_1^\ell, \ldots, z_{i_\ell}^\ell \in L_{\bar{\alpha}}$.

Sei $\varphi'(v_1, z_1^2, \ldots, z_{i_2}^2, \ldots, z_1^k, \ldots, z_{i_k}^k)$ diejenige Formel mit Parametern, die aus $\varphi(v_1, x_2, \ldots, x_k)$ da–

dadurch hervorgeht, daß für $\ell = 2, \ldots, k$ jedes Vorkommnis von $u \in x_\ell$ durch

$$\varphi_\ell(u, z_1^\ell, \ldots, z_{i_\ell}^\ell)$$

und jedes Vorkommnis von $x_\ell \in u$ durch

$$\exists u' [\forall u'' (u'' \in u' \Leftrightarrow \varphi_\ell(u'', z_1^\ell, \ldots, z_{i_\ell}^\ell)) \wedge u' \in u]$$

(für geeignete u', u'') ersetzt wird. Dann gilt

$$\{z \in x_2 : L_\alpha \models \varphi(z, x_2, \ldots, x_k)\} =$$

$$\{z \in L_{\bar\alpha} : z \in x_2 \wedge V \models \varphi(z, x_2, \ldots, x_k)\} =$$

$$\{z \in L_{\bar\alpha} : L_{\bar\alpha} \models \text{"}\varphi_2(z, z_1^2, \ldots, z_{i_2}^2) \wedge \varphi'(z, z_1^2, \ldots, z_{i_2}^2, \ldots, z_1^k, \ldots, z_{i_k}^k)\text{"}\}$$

$$\in \mathrm{Def}(L_{\bar\alpha}) = L_\alpha .$$ ⊣

Bemerkung: L_α ist nicht notwendigerweise Modell von Σ_1-Komprehension.

<u>Satz</u> 2.9 $L \models ZF$.

Beweis: L ist transitiv. Damit gilt $L \models$ Extensionalität und $L \models$ Fundierung wegen 1.6 und 1.7. In L

gilt das Unendlichkeitsaxiom wegen 2.4 und 1.8, es gilt das Paarmengenaxiom wegen 2.5 und 1.9, und es gilt das Vereinigungsmengenaxiom wegen 2.6 und 1.10.

Wir wollen nun $L \models$ Potenzmengenaxiom zeigen. Sei $x \in L$. Sei α so, daß $\mathcal{P}(x) \cap L \subset L_\alpha$ (ein solches α existiert aufgrund des Ersetzungsschemas in V!). Dann gilt

$$\mathcal{P}(x) \cap L = \{ y \in L_\alpha : L_\alpha \models \forall v_0 \in y \; v_0 \in x \}$$

$\in L_{\alpha+1} \subset L$. Damit gilt aber auch

$$L \models \exists z \, (z = \mathcal{P}(x)).$$

Wir zeigen jetzt ~~Für den Nachweis der Gültigkeit~~ des Aussonderungsschemas in L. ~~benutzen wir 2.8~~

Sei φ eine Formel, in der $v_1, \dots, v_k$ frei vorkommen, und seien $x_2, \dots, x_k \in L$. Es gibt dann eine Ordinalzahl α, so daß $x_2, \dots, x_k \in L_\alpha$ und für alle $z \in L_\alpha$:

$$L_\alpha \models \varphi(z, x_2, \dots, x_k) \iff$$

$$L \models \varphi(z, x_2, \dots, x_k) .$$

(Der Beweis hiervon benutzt lediglich, daß $(L_\alpha : \alpha \in OR)$

eine kumulative Hierarchie im Sinne von 2.3 ist). Dann gilt aber

$$\{ z \in x_2 : L \models \varphi(z, x_2, \dots, x_k) \} =$$

$$\{ z \in L_\alpha : L_\alpha \models z \in x_2 \wedge \varphi(z, x_2, \dots, x_k) \}$$

$$\in \mathrm{Def}(L_\alpha) \subset L.$$

Das Ersetzungsschema in L zeigt man sehr leicht mit Hilfe des Ersetzungsschemas in V und $L \models$ Aussonderungsschema. $\dashv$

~~Die Theorie KP (Kripke Platek) besitzt die folgenden Axiome~~

Die Theorie BS ("basic set theory") besitzt die folgenden Axiome: Extensionalität, Fundierung, Paarmengenaxiom, Vereinigungsmengenaxiom, Unendlichkeitsaxiom, Axiom des Kartesischen Produkts (d.h. $\forall x \forall y \exists z \; z = x \times y$), Σ_0 Komprehension.

<u>Lemma</u> 2.10 Sei $\alpha > \omega$. Dann ist $L_\alpha \models BS$, falls α eine Limesordinalzahl ist.

Beweis: Aufgrund von 2.3, 1.6, 1.7, 1.8, 2.5 und 1.9, 2.6 und 1.10, sowie 2.8 bleibt nur zu zeigen, daß $L_\alpha \models$ Axiom d. Kartesischen Produkts. Seien $x, y \in L_\alpha$. Sei $\bar\alpha < \alpha$ so, daß $x \in L_{\bar\alpha}$ und $y \in L_{\bar\alpha}$. Mit $u \in x$ und $v \in y$ ist $u \in L_{\bar\alpha}$ und $v \in L_{\bar\alpha}$, und damit $(u,v) \in L_{\bar\alpha+2} \subset L_\alpha$. Insbesondere gilt $x \times y \subset L_{\bar\alpha+2}$. Dann ist aber

$$x \times y = \{(u,v) \in L_{\bar\alpha+2} : u \in x \wedge v \in y\} \in L_{\bar\alpha+3},$$

also $x \times y \in L_\alpha$. Es ist aber leicht nachzurechnen, daß die Formel $v_0 = v_1 \times v_2$ Σ_0 ist. Damit haben wir gezeigt, daß $L_\alpha \models$ Axiom d. Kartesischen Produkts. $\dashv$

Im folgenden sei $(\varphi_i : i < \omega)$ eine rekursive Aufzählung aller Formeln. Wir schreiben $\ulcorner\varphi\urcorner$ für die Gödelnummer von φ. O.B.d.A. $\ulcorner\varphi_i\urcorner = i$.
Der Beweis des folgenden Satzes ist Übungsaufgabe.

<u>Satz</u> 2.11 Die Formel "M ist transitiv, e ist die Gödelnummer einer Formel φ, die die Variablen $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ frei enthält, $f : \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \to M$, und es gilt $M \models \varphi[\beta]$ für eine / jede M-Belegung β mit $\beta(v_{i_1}) = f(v_{i_1}), \dots, \beta(v_{i_k}) = f(v_{i_k})$" ist Δ_1^{BS}.

Wir kürzen diesen Sachverhalt wie folgt ab:
" $M \dot{\models} \ulcorner\varphi\urcorner[f]$ " ist Δ_1^{BS}.

Korollar. 2.12 Die Formel " $y = \mathrm{Def}(x)$ " ist Δ_1^{BS}.

Wir bezeichnen mit " $x = L_\alpha$ " die folgende Formel: " α ist eine Ordinalzahl, und es gibt eine Folge $(\ell_\beta : \beta \leq \alpha)$ mit folgenden Eigenschaften: $\ell_0 = \emptyset$, $\ell_1 = \{\emptyset\}$, $\ell_{\beta+1} = \mathrm{def}(\ell_\beta)$ für $\beta+1 \leq \alpha$, $\ell_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \ell_\beta$ für Limeszahlen $\lambda \leq \alpha$, und $x = \ell_\alpha$." Aufgrund von 2.12 ergibt sich offensichtlich,

Lemma 2.13 Die Formel " $x = L_\alpha$ " ist Σ_1^{BS}.

Satz 2.14 Sei $\alpha > \omega$ eine Limesordinalzahl, und sei $\beta < \alpha$. Dann ist $(L_\gamma : \gamma \leq \beta) \in L_\alpha$.

Beweis durch Induktion nach (α, β), wobei $(\bar\alpha, \bar\beta) < (\alpha, \beta)$ gdw. $\bar\alpha < \alpha$ oder $\bar\alpha = \alpha \wedge \bar\beta < \beta$: Angenommen, die Behauptung stimmt für alle $(\bar\alpha, \bar\beta) < (\alpha, \beta)$.

1. Fall. ~~[illegible]~~ $\beta = \bar\beta + 1 \ (< \alpha)$.

Es gilt also $(L_\gamma : \gamma \leq \bar\beta) \in L_\alpha$. Es ist aber also auch $(L_\gamma : \gamma \leq \bar{\beta}+1) = (L_\gamma : \gamma \leq \bar{\beta}) \cup \{(\bar{\beta}+1, L_{\bar{\beta}+1})\}$ $\in L_\alpha$. Sei nun β eine Limesordinalzahl. Induktiverweise ist $(L_\gamma : \gamma \leq \bar{\beta}) \in L_\alpha$ für alle $\bar{\beta} < \beta$.

$$L_{\bar\beta+1} = \{x \in L_{\bar\beta+1} : L_{\bar\beta+1} \models x = x\} \in L_{\bar\beta+2} \subset L_\alpha ,$$

also auch $(\bar\beta+1, L_{\bar\beta+1}) \in L_\alpha$, und damit

$$(L_\gamma : \gamma \leq \beta) = (L_\gamma : \gamma \leq \bar\beta) \cup \{(\bar\beta+1, L_{\bar\beta+1})\} \in L_\alpha .$$

2. Fall β ist eine Limeszahl $< \alpha$.

Es gilt also $(L_\gamma : \gamma \leq \bar\beta) \in L_\beta$ (!) für alle $\bar\beta < \beta$. Insbesondere gilt für $\bar\beta < \beta$, daß

$V \models x = L_{\bar\beta} \iff L_\beta \models$ "$x = L_{\bar\beta}$". Damit gilt

$$(L_\gamma : \gamma < \beta) = \{(\gamma, x) : L_\beta \models \text{"}x = L_\gamma\text{"}\} \in L_{\beta+1} .$$

Darüberhinaus gilt $L_\beta \in L_{\beta+1}$, also schließlich

$$(L_\gamma : \gamma \leq \beta) = (L_\gamma : \gamma < \beta) \cup \{(\beta, L_\beta)\} \in L_\alpha . \quad \dashv$$

Korollar 2.15 Sei $\alpha > \omega$ eine Limesordinalzahl. Dann gilt $L_\alpha \models \forall y \exists x \exists \beta (x = L_\beta \wedge y \in x)$.

Der Satz "$\forall y \exists x \exists \beta (x = L_\beta \wedge y \in x)$" ist Π_2^{BS} aufgrund von 2.13. Wir benötigen die folgende Umkehrung zu 2.15 :

Satz 2.16. Sei M transitiv, $M \models BS$. Wenn

$M \models \forall y \, \exists x \, \exists \beta \, (x = L_\beta \wedge y \in x)$, dann existiert eine Limesordinalzahl α mit $M = L_\alpha$.

Beweis: Sei $\alpha = M \cap OR$. Sei $\xi < \alpha$. Dann existiert ein $x \in M$ und ein $\beta < \alpha$ mit $M \models$ "$x = L_\beta \wedge \xi \in x$". Wegen $M \models BS$ und 2.13 gilt $x = L_\beta$ und $\xi \in x$, d.h. $\xi \in L_\beta$. Für jedes $\xi < \alpha$ existiert also ein β mit $\xi < \beta < \alpha$ und $L_\beta \in M$. Insbesondere ist $L_\alpha \subset M$, da M transitiv ist. Sei nun $y \in M$. Dann existieren $x \in M$ und $\beta < \alpha$ mit $M \models$ "$x = L_\beta \wedge y \in x$", also $y \in L_\beta$ wegen $M \models BS$ und 2.13. Daraus folgt $M \subset L_\alpha$. $\dashv$

<u>Satz</u> 2.17 (Kondensationslemma). Sei $\alpha > \omega$ eine Limesordinalzahl, sei M transitiv, und sei

$$\pi : M \xrightarrow[\Sigma_2]{} L_\alpha . \quad {}^{*)}$$

Dann ist $M = L_{\bar{\alpha}}$, wobei $\bar{\alpha} = M \cap OR \leq \alpha$.

Beweis: Es ist leicht zu sehen, daß es einen

---

*) D.h. π ist eine Σ_2-elementare Abbildung von M nach L_α.

Π_2 Satz φ_{BS} gibt mit folgender Eigenschaft:
Für transitives N ist $N \models \varphi_{BS}$ gdw. $N \models BS$.
Da $L_\alpha \models BS$, gilt somit $L_\alpha \models \varphi_{BS}$, also $M \models \varphi_{BS}$, da π Σ_2-elementar ist, also auch $M \models BS$.
Nun folgt die Behauptung leicht aus 2.15 und (dem Beweis von) 2.16. $\dashv$

<u>Satz</u> 2.18 (Schwache Akzeptierbarkeit) Sei $\alpha \geq \aleph_0$, und sei $x \subset \alpha$, $x \in L$. Dann ist $x \in L_\gamma$, wobei $\gamma = \alpha^+$.

Beweis: Sei $x \in L_\beta$, wobei $\beta > \omega$ eine Limeszahl ist. Man wähle $\pi : M \longrightarrow_{\Sigma_2} L_\beta$, wobei M transitiv ist, $\pi \upharpoonright \alpha + 1 = \mathrm{id}$, $\pi(x) = x$, und $\mathrm{Card}(M) = \mathrm{Card}(\alpha) < \alpha^+$. Mit 2.17 gilt $M = L_{\bar\beta}$ für eine Limeszahl $\bar\beta$. Da $\mathrm{Card}(L_{\bar\beta}) < \alpha^+$, muß $\bar\beta < \alpha^+$ gelten. Da $x \in M = L_{\bar\beta}$, ist also $x \in L_{\alpha^+}$. $\dashv$

Wir wollen nun eine "globale Wohlordnung" von L definieren. Hierzu definieren wir induktiv Wohlordnungen $<_\alpha$ von L_α.

Angenommen, $<_\beta$ ist bereits definiert für alle $\beta < \alpha$. Wenn α Limeszahl ist, dann sei $<_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} <_\beta$. Sei nun $\alpha = \bar{\alpha}+1$. Wir definieren dann $x <_\alpha y$ gdw.

$$x \in L_\alpha \wedge y \in L_\alpha \wedge [\, x <_{\bar\alpha} y \vee (x \in L_{\bar\alpha} \wedge y \notin L_{\bar\alpha}) \vee$$

$$(x \notin L_{\bar\alpha} \wedge y \notin L_{\bar\alpha} \wedge$$

wenn $(i, \vec{z})$ minimal ist mit $x = \{u \in L_{\bar\alpha} : L_{\bar\alpha} \models \varphi_i(u, \vec{z})\}$ und wenn $(i', \vec{z}')$ minimal ist mit $y = \{u \in L_{\bar\alpha} : L_{\bar\alpha} \models \varphi_{i'}(u, \vec{z}')\}$, dann ist $(i, \vec{z}) < (i', \vec{z}')$.

Hierbei ist $(i,\vec{z}) < (i', \vec{z}')$ gdw. $i < i'$ oder $i = i'$ und $\vec{z} < \vec{z}'$ in der durch $<_{\bar\alpha}$ induzierten lexikographischen Ordnung.

Man zeigt leicht:

<u>Satz</u> 2.19 Es gibt eine Σ_1 Formel $\varphi(u,v)$, so daß für alle Limeszahlen $\alpha > \omega$ gilt:

$$L_\alpha \models \varphi(x,y) \iff x <_\alpha y.$$

<u>Korollar</u> 2.20 $L \models$ Auswahlaxiom.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß in L jede

Menge wohlgeordnet werden kann. Sei $x \in L$, $x \in L_\alpha$, wobei $\alpha > \omega$ Limeszahl ist. Dann ist $<_\alpha \upharpoonright x \in L_{\alpha+1} \subset L$ wegen 2.19 und ist eine Wohlordnung von x in L. $\dashv$

GCH ("generalized continuum hypothesis") ist die Aussage $\forall \alpha \; 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

<u>Satz</u> 2.21 $L \models GCH$.

Beweis: $L \models \forall y \, \exists x \, \exists \alpha \, (x = L_\alpha \wedge y \in x)$ wegen 2.15. Damit gilt aufgrund von 2.18, angewandt in L:

$$L \models \forall \alpha \; \mathcal{P}(\aleph_\alpha) \subset L_{\aleph_{\alpha+1}}, \quad \text{und damit}$$

$$L \models 2^{\aleph_\alpha} \leq \operatorname{Card}(L_{\aleph_{\alpha+1}}).$$

2.21 ergibt sich damit aus dem folgenden Lemma (dessen Beweis nicht 2.21 voraussetzt), angewandt in L. $\dashv$

<u>Lemma</u> 2.22 Für alle $\alpha \geq \omega$ ist $\operatorname{Card}(L_\alpha) = \operatorname{Card}(\alpha)$.

Beweis durch Induktion nach α: $\operatorname{Card}(L_\omega) = \operatorname{Card}(V_\omega) = \aleph_0$. Wenn α eine Limesordinalzahl ist, dann gilt $\mathrm{Card}(L_\alpha) = \mathrm{Card}(\bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta) = \mathrm{Card}(\alpha) \cdot \sup_{\beta<\alpha}(\mathrm{Card}(L_\beta))$

$= \mathrm{Card}(\alpha) \cdot \sup_{\beta<\alpha}(\mathrm{Card}(\beta)) = \mathrm{Card}(\alpha)$. Wenn $\alpha = \bar{\alpha}+1$,

dann ist $\mathrm{Card}(L_\alpha) = \mathrm{Card}(\mathrm{Def}(L_{\bar{\alpha}}))$; man sieht

aber leicht, daß dies $= \mathrm{Card}(L_{\bar{\alpha}}) = \mathrm{Card}(\bar{\alpha}) = \mathrm{Card}(\alpha)$

ist. $\dashv$