Kap. 5 Eine Ultrapotenzkonstruktion

Sei $\pi : L_\alpha \longrightarrow_{\Sigma_\omega} L_{\tilde{\alpha}}$ gegeben, wobei α und $\tilde{\alpha}$ Limesordinalzahlen $> \omega$ sind. Sei $\beta \geq \alpha$. Wir setzen voraus, daß gilt:

(A1) Für alle $\xi < \alpha$ ist $\mathcal{P}(\xi) \cap L_\beta \subset L_\alpha$

(d.h. L_α und L_β enthalten dieselben beschränkten Teilmengen von α).

Wir nehmen weiters an:

(A2) $\rho_\omega^\beta < \alpha$.

Aufgrund von 4.16 gibt es ein kleinstes $n < \omega$, so daß ein $\xi < \alpha$ und $p_1, \dots, p_k \in L_\beta$ existieren mit $L_\beta = h_{n+1}^{\beta}{}''(\xi \cup \{p_1, \dots, p_k\})$. Wir schreiben n_0 für das kleinste solche n. Beachte: Für $\xi < \alpha$ und $p_1, \dots, p_k \in L_\beta$ ist $L_\beta \neq h_{n_0}^{\beta}(\xi \cup \{p_1, \dots, p_k\})$.

<u>Lemma</u> 5.1 Sei $\xi < \alpha$, $p_1, \dots, p_k \in L_\beta$, und sei $L_\eta \stackrel{\sigma}{\cong} h_{n_0}^{\beta}(\xi \cup \{p_1, \dots, p_k\})$. Dann ist $\eta < \alpha$.

Beweis: Man beachte, daß wegen 4.9 immer ein solches η existiert. Zunächst ist $\eta < \beta$, da ansonsten $L_\beta = h_{n_0}^{\beta}(\xi \cup \{\sigma^{-1}(p_1), \dots, \sigma^{-1}(p_k)\})$ wegen 4.9 und wegen (des Beweises von) 4.14. Dann ist aber auch $\eta < \alpha$ wegen (des Beweises von) 4.16.

$\dashv$

Wir schreiben nun

$$\Gamma = \{ f \restriction (\xi \cup \{p_1, \dots, p_k\}) \; : \; f \in \mathcal{F}_{n_0}^{\beta}, \; \xi < \alpha \text{ und } p_1, \dots, p_k \in L_\beta \}.$$

~~[illegible]~~

Sei $g \in \Gamma$. Wir können dann offensichtlich g identifizieren mit einer Funktion $\tilde{g} : [\xi]^n \to L_\beta$ für ein $n < \omega$, wobei $\tilde{g}(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n) =$

$$f(\underbrace{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n, p_1, \dots, p_k}_{\substack{\text{u.U. in andrer Reihenfolge} \\ \text{bzw. mit Auslassungen}}}) \quad \text{für } g = f \restriction \xi \cup \{p_1, \dots, p_k\}.$$

Wir werden im folgenden so tun, als sei

~~für~~ jedes $g \in \Gamma$ von der Form $g : [\xi]^n \to L_\beta$.
Insbesondere ist $\mathrm{dom}(g) = [\xi]^n$ für ein $n < \omega$ und ein $\xi < \alpha$.

Γ^* sei die Menge aller (a, f), wobei $f \in \Gamma$, $a \in [\mathrm{OR}]^{<\omega}$ und $a \in \pi(\mathrm{dom}(f))$ (d. h. $a \in [\pi(\xi)]^n$ für $\mathrm{dom}(f) = [\xi]^n$).

<u>Lemma</u> 5.2 Sei φ Σ_{n_0}, wobei φ (höchstens) die freien Variablen $v_1, \dots, v_k$ enthält. Seien $(a_1, f_1), \dots, (a_k, f_k) \in \Gamma^*$. Dann ist

$$\{(u_1, \dots, u_k) \in \mathrm{dom}(f_1) \times \dots \times \mathrm{dom}(f_k) : L_\beta \models \varphi(f_1(u_1), \dots, f_k(u_k))\} \in L_\alpha .$$

Beweis: Sei $\xi < \alpha$ so, daß $\mathrm{dom}(f_1) \cup \dots \cup \mathrm{dom}(f_k) \subset [\xi]^{<\omega}$. Sei, für $m = 1, \dots, k$ $f_m = \tilde{f}_m \upharpoonright \xi_m \cup \{p_1^m, \dots, p_{k_m}^m\}$. Sei

$$L_\eta \overset{\sigma}{\cong} h_{n_0}^\beta{}''(\xi \cup \{p_1^1, \dots, p_{k_1}^1, \dots, p_1^k, \dots, p_{k_k}^k\}) \prec_{\Sigma_{n_0}} L_\beta .$$

Es gilt $\eta < \alpha$ wegen 5.1.

Seien $\bar{\tilde{f}}_m$ Kompositionen von Σ_{n_0} Skolem-Funktionen, die über L_η so definiert sind wie die $\tilde{f}_m$ über L_β definiert sind. Dann gilt für $(u_1, \dots, u_k) \in \mathrm{dom}(f_1) \times \dots \times \mathrm{dom}(f_k)$:

$$L_\beta \models \varphi(f_1(u_1), \dots, f_k(u_k)) \quad \text{gdw.}$$

$$L_\beta \models \varphi(\tilde{f}_1(u_1, p_1^1, \dots, p_{k_1}^1), \dots, \tilde{f}_k(u_k, p_1^k, \dots, p_{k_k}^k)) \quad \text{gdw.}$$

$$L_\eta \models \varphi(\bar{\tilde{f}}_1(u_1, \sigma^{-1}(p_1^1), \dots, \sigma^{-1}(p_{k_1}^1)), \dots, \bar{\tilde{f}}_k(u_k, \sigma^{-1}(p_1^k), \dots, \sigma^{-1}(p_{k_k}^k))).$$

Damit gilt aber dann

$$\{(u_1, \dots, u_k) \in \mathrm{dom}(f_1) \times \dots \times \mathrm{dom}(f_k) : L_\beta \models \varphi(f_1(u_1), \dots, f_k(u_k))\} \in \mathrm{Def}(L_\eta)$$

$= L_{\eta+1} \subset L_\alpha$.

$\dashv$

Für $(a, f), (b, g) \in \Gamma^*$ schreiben wir $(a, f) \sim (b, g)$ gdw. $(a, b) \in \pi(\{(u, v) : f(u) = g(v)\})$.

<u>Lemma</u> 5.3 $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf Γ^*.

Beweis: Für $(a,f) \in \Gamma^*$ ist $a \in \pi(\mathrm{dom}(f))$, also auch $(a,a) \in \pi(\{(u,v) : f(u) = f(v)\})$.
Beachte, daß $\{(u,v) : f(u) = f(v)\} \in L_\alpha$ wegen 5.2. Dies zeigt die Reflexivität von $\sim$.
Symmetrie ist trivial; Transitivität einfach.

$\dashv$

Für $(a,f) \in \Gamma^*$ schreiben wir nun $[a,f]$ für die Äquivalenzklasse von (a,f), d.h.

$$[a,f] = \{(b,g) : (b,g) \sim (a,f)\}.$$

Wir schreiben $\tilde{\Gamma}$ für $\{[a,f] : (a,f) \in \Gamma\}$.
Für $[a,f], [b,g] \in \tilde{\Gamma}$ definieren wir $[a,f] \mathrel{\tilde{\in}} [b,g]$ gdw. $(a,b) \in \pi(\{(u,v) : f(u) \in g(v)\})$.
Wir setzen $N = (\tilde{\Gamma}; \tilde{\in})$. Die Relation $\tilde{\in}$ interpretiert das Symbol $\in$ der Sprache der Mengenlehre, d.h. $\in^N = \tilde{\in}$.

<u>Satz</u> 5.4 (Łoś-theorem) Sei φ Σ_{n_0}, wobei φ (höchstens) die Variablen $v_1, \dots, v_k$ frei enthält. Seien $(a_1, f_1), \dots, (a_k, f_k) \in \Gamma$. Dann gilt

$$N \models \varphi([a_1, f_1], \ldots, [a_k, f_k]) \iff$$
$$(a_1, \ldots, a_k) \in \pi(\{(u_1, \ldots, u_k) : L_\beta \models \varphi(f_1(u_1), \ldots, f_k(u_k))\}).$$

Beweis durch Induktion nach der Formelkomplexität: Sei zunächst φ atomar, etwa $\varphi \equiv v_{i_1} \in v_{i_2}$. Sei $k \geq \max\{i_1, i_2\}$. Seien $(a_1, f_1), \ldots, (a_k, f_k) \in \Gamma$. Es ist $N \models \varphi([a_1, f_1], \ldots, [a_k, f_k])$ gdw. $N \models [a_{i_1}, f_{i_1}] \in [a_{i_2}, f_{i_2}]$ gdw. $[a_{i_1}, f_{i_1}] \tilde{\in} [a_{i_2}, f_{i_2}]$ gdw. $(a_{i_1}, a_{i_2}) \in \pi(\{(u, v) : f_{i_1}(u) \in f_{i_2}(v)\})$ gdw. $(a_1, \ldots, a_k) \in \pi(\{(u_1, \ldots, u_k) \in \mathrm{dom}(f_1) \times \ldots \times \mathrm{dom}(f_k) :$

$$L_\beta \models \varphi(f_1(u_1), \ldots, f_k(u_k))\}).$$

Der Fall, daß φ aussagenlogische Verknüpfung einfacher Formeln ist, ist einfach.

Wir betrachten nun den Fall, daß

$$\varphi \equiv \exists v_{k+1} \ldots \exists v_\ell \, \psi(v_1, \ldots, v_\ell),$$

wobei ψ ~~∑~~ Π_{n_0-1} ist (wir setzen hierfür $n_0 > 0$ voraus). Die übrigen Fälle ergeben sich durch einfache Varianten dieses Falles.

"$\Longrightarrow$" Sei $N \models \varphi([a_1, f_1], \ldots, [a_k, f_k])$. Seien $[a_{k+1}, f_{k+1}], \ldots, [a_\ell, f_\ell] \in N$ so, daß

$$N \models \psi([a_1, f_1], \ldots, [a_\ell, f_\ell]) .$$

Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$(a_1, \ldots, a_\ell) \in \pi(\{(u_1, \ldots, u_\ell) : L_\beta \models \psi(f_1(u_1), \ldots, f_\ell(u_\ell))\}).$$

Es gilt nun $\{(u_1, \ldots, u_\ell) : L_\beta \models \psi(f_1(u_1), \ldots, f_\ell(u_\ell))\}$

$$\subset \{(u_1, \ldots, u_\ell) \in \mathrm{dom}(f_1) \times \ldots \times \mathrm{dom}(f_\ell) : L_\beta \models \exists v_{k+1} \ldots \exists v_\ell \, \psi(f_1(u_1), \ldots, f_k(u_k), v_{k+1}, \ldots, v_\ell\},$$

und letztere Menge ist wegen 5.2 Element von L_α. Damit gilt dann auch

$$(a_1, \ldots, a_k) \in \pi(\{(u_1, \ldots, u_k) : L_\beta \models \varphi(f_1(u_1), \ldots, f_k(u_k))\})$$

wie gewünscht.

"$\Longleftarrow$" Sei $(a_1, \ldots, a_k) \in \pi(\{(u_1, \ldots, u_k) :$

$$L_\beta \models \varphi(f_1(u_1), \ldots, f_k(u_k))\}).$$

Sei $\varphi \equiv \varphi_i^{n_0}$. Wir definieren

$F : \mathrm{dom}(f_1) \times \ldots \times \mathrm{dom}(f_k) \longrightarrow L_\beta$ durch

$$F(u_1,\dots,u_k) = \begin{cases} h^{\beta}_{n_0}(i,f) \text{ für } f:\{v_1,\dots,v_k\}\to L_\beta, \\ f(v_1)=f_1(u_1),\dots,f(v_k)=f_k(u_k), \text{ falls dies definiert ist,} \\ \\ \text{nicht definiert sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren, für $k+1 \le m \le l$,

$f_m : \mathrm{dom}(f_1)\times\dots\times\mathrm{dom}(f_k) \longrightarrow L_\beta$ durch

$$f_m(u_1,\dots,u_k) = \begin{cases} F(u_1,\dots,u_k)(v_m), \text{ falls } F(u_1,\dots,u_k) \text{ definiert ist,} \\ \text{nicht definiert sonst.} \end{cases}$$

Man überzeugt sich nun leicht, daß jedes f_m, $k+1 \le m \le l$, in $\mathcal{F}^{\beta}_{n_0}$ ist. Weiters können wir jedes f_m als eine Funktion mit Urbildbereich $[\xi]^{m_0}$ auffassen für ein $\xi<\alpha$ und $m_0 = |a_1\cup\dots\cup a_k|$. Es genügt nun zu zeigen, daß

$$N \models \varphi([a_1,f_1],\dots,[a_k,f_k],[a_1\cup\dots\cup a_k, f_{k+1}],\dots,$$
$$[a_1\cup\dots\cup a_k, f_l]).$$

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung ist dies äquivalent mit $(a_1,\dots,a_k,a_1\cup\dots\cup a_k,\dots,a_1\cup\dots\cup a_k) \in$
$$\pi(\{(u_1,\dots,u_l) : L_\beta \models \varphi(f_1(u_1),\dots,f_l(u_l))\}).$$

Dies folgt aber aus

$(a_1, \ldots, a_k) \in \pi(\{(u_1, \ldots, u_k) : L_\beta \models \varphi(f_1(u_1), \ldots, f_k(u_k))\})$

und der Wahl von f_m, $k+1 \leq m \leq \ell$.

$\dashv$

Wir definieren nun $\tilde{\pi} : L_\beta \to N$ durch $\tilde{\pi}(x) = [\emptyset, c_x]$, wobei $c_x : \{\emptyset\} \to L_\beta$, $c_x(\emptyset) = x$.

<u>Lemma</u> 5.5 Es gilt $\tilde{\pi} : L_\beta \to_{\Sigma_{n_0}} N$.

Beweis: Sei φ Σ_{n_0}, wobei φ (höchstens) die Variablen $v_1, \ldots, v_k$ enthält. Seien $x_1, \ldots, x_k \in L_\beta$. Dann gilt $N \models \varphi(\tilde{\pi}(x_1), \ldots, \tilde{\pi}(x_k)) \iff$

$N \models \varphi([\emptyset, c_{x_1}], \ldots, [\emptyset, c_{x_k}]) \iff$

$(\emptyset, \ldots, \emptyset) \in \pi(\{(u_1, \ldots, u_k) : L_\beta \models \varphi(c_{x_1}(u_1), \ldots, c_{x_k}(u_k))\})$

wegen 5.4, $\iff L_\beta \models \varphi(x_1, \ldots, x_k)$.

$\dashv$

Der folgende Satz ist eine Verstärkung von 5.5, die sich nicht abstrakt aus dem Łoś-theorem 5.4 gewinnen läßt.

<u>Satz</u> 5.6 Es gilt $\tilde{\pi} : L_\beta \longrightarrow_{\Sigma_{n_0+1}} N$.

Beweis: Sei φ Σ_{n_0+1}, etwa

$$\varphi \equiv \exists v_1 \ldots \exists v_\ell \, \psi(v_1, \ldots, v_{\ell^*}),$$

wobei ψ Π_{n_0} ist. Seien $x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell^*} \in L_\beta$, und sei

$$N \models \varphi(\tilde{\pi}(x_{\ell+1}), \ldots, \tilde{\pi}(x_{\ell^*}))$$

vorausgesetzt. Wir müssen zeigen, daß

$$L_\beta \models \varphi(x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell^*}).$$

Seien $[a_1, f_1], \ldots, [a_\ell, f_\ell] \in N$ so, daß

$$N \models \psi([a_1, f_1], \ldots, [a_\ell, f_\ell], [\emptyset, c_{x_{\ell+1}}], \ldots, [\emptyset, c_{x_{\ell^*}}]).$$

Setze

$$A = \{(u_1, \ldots, u_{\ell^*}) : L_\beta \models \neg\psi(f_1(u_1), \ldots, f_\ell(u_1), c_{x_{\ell+1}}(u_{\ell+1}), \ldots, c_{x_{\ell^*}}(u_{\ell^*}))\}$$

Es ist $A \in L_\alpha$ wegen 5.2, und es gilt $(a_1, \ldots, a_\ell, \emptyset, \ldots, \emptyset) \notin \pi(A)$ aufgrund von 5.4.

~~Man gilt also~~

~~L_α~~

Setze $\quad B = \left(\mathrm{dom}(f_1) \times \ldots \times \mathrm{dom}(f_\ell) \times \{\emptyset\} \times \ldots \times \{\emptyset\}\right) \setminus A$

(d.h. B ist das "Komplement" von A).

Es gilt

$$L_\alpha \models \forall (u_1, \ldots, u_\ell, u_{\ell+1}, \ldots, u_{\ell^*}) \in \mathrm{dom}(f_1) \times \ldots \times \mathrm{dom}(f_\ell) \times \{\emptyset\} \times \ldots \times \{\emptyset\}$$
$$\left[(u_1, \ldots, u_{\ell^*}) \in A \quad \vee \quad (u_1, \ldots, u_{\ell^*}) \in B \right]$$

Damit gilt auch

$$L_{\tilde\alpha} \models \forall (u_1, \ldots, u_\ell, u_{\ell+1}, \ldots, u_{\ell^*}) \in \pi(\mathrm{dom}(f_1)) \times \ldots \times \pi(\mathrm{dom}(f_\ell)) \times \{\emptyset\} \times \ldots \times \{\emptyset\}$$

$$\left[(u_1, \ldots, u_{\ell^*}) \in \pi(A) \quad \vee \quad (u_1, \ldots, u_{\ell^*}) \in \pi(B) \right].$$

Wegen $(a_1, \ldots, a_\ell, \emptyset, \ldots, \emptyset) \in \pi(A)$ ist also $(a_1, \ldots, a_\ell, \emptyset, \ldots, \emptyset) \in \pi(B)$.

Damit muß $B \neq \emptyset$ gelten; wenn $(\bar a_1, \ldots, \bar a_\ell, \emptyset, \ldots, \emptyset) \in B$, dann ist nun

$$L_\beta \models \varphi(f_1(\bar a_1), \ldots, f_\ell(\bar a_\ell), x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell^*}),$$

d.h.

$$L_\beta \models \exists v_1 \ldots \exists v_\ell \, \varphi(x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell^*}).$$

$\dashv$

<u>Definition 5.7</u> Wir schreiben $\mathrm{ult}_{n_0}(L_\beta, \pi)$ für N; $\mathrm{ult}_{n_0}(L_\beta, \pi)$ ist die (<u>feine</u>) <u>Ultrapotenz</u> von L_β mittels π.

Bemerkung: $\mathrm{ult}_{n_0}(L_\beta, \pi)$ muß <u>nicht</u> fundiert sein. Falls $\mathrm{ult}_{n_0}(L_\beta, \pi)$ fundiert ist, dann identifizieren wir $\mathrm{ult}_{n_0}(L_\beta, \pi)$ mit dem transitiven Kollaps von N. Wir schreiben dann auch $[a, f]$ für das Bild von $[a, f]$ unter diesem transitiven Kollaps.

Wir setzen nun für den Rest dieses Kapitels voraus:

(A3) $ult_{n_0}(L_\beta, \pi)$ ist fundiert und damit transitiv.

Wir schreiben $\bar{N} = ult_{n_0}(L_\beta, \pi)$.

Sei nun $\alpha' = \sup \pi'' \alpha$.

<u>Lemma</u> 5.8 Für alle $\gamma < \alpha'$ ist $\gamma = [\{\gamma\}, pr]$ für jedes $pr : [\xi]^1 \to \xi$ mit $\gamma < \pi(\xi)$, wobei $pr(\{\bar{\xi}\}) = \bar{\xi}$ für alle $\bar{\xi} \in \xi$.

Beweis durch Induktion nach γ:

Sei $(b, g) \in \Gamma$, $[b, g] \hat{\in} [\{\gamma\}, pr]$, und damit $(b, \{\gamma\}) \in \pi(\{(u, v) : g(u) \in pr(v)\})$. O.B.d.A. gilt damit $g(u) < \xi$ für alle $u \in dom(g)$, wobei $[\xi]^1 = dom(pr)$, $\xi < \alpha$. Damit gilt aber $g \in L_\alpha$ aufgrund von (A2)! Damit ist $\pi(\{(u, v) : g(u) \in pr(v)\}) = \{(u, v) : \pi(g)(u) \in pr(v)\}$, und somit $\pi(g)(b) \in \gamma$. Sei $\pi(g)(b) = \bar{\gamma} = \pi(pr)(\{\bar{\gamma}\})$. Wir haben dann $(b, \{\bar{\gamma}\}) \in \pi(\{(u, v) : g(u) = pr(v)\})$, mithin $[b, g] = [\{\bar{\gamma}\}, pr]$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $[\{\bar\gamma\}, pr] = \bar\gamma$, so daß nun ~~[illegible]~~ $[b, g] = [\{\bar\gamma\}, pr] = \bar\gamma < \gamma$. Damit gilt $[\{\gamma\}, pr] \subset \gamma$.

Sei nun $\bar\gamma < \gamma$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\bar\gamma = [\{\bar\gamma\}, pr]$. Es ist aber offensichtlich $(\{\bar\gamma\}, \{\gamma\}) \in \pi(\{(u,v) : pr(u) \in pr(v)\})$, also $\bar\gamma = [\{\bar\gamma\}, pr] \,\tilde\in\, [\{\gamma\}, pr]$. Somit $\gamma \subset [\{\gamma\}, pr]$.

Wir haben gezeigt, daß $\gamma = [\{\gamma\}, pr]$.

$\dashv$

Lemma 5.9 Sei $(a, f) \in \Gamma$ mit $f \in L_\beta$. Dann ist $[a, f] = \tilde\pi(f)(a)$.

Beweis: Es ist $a \in \pi(\mathrm{dom}(f))$, also auch $(a, \emptyset) \in \pi(\{(u,v) : c_f(v)$ an der Stelle $id(u) = f(u)\})$, und damit nach Łoś $[\emptyset, c_f]$ an der Stelle ~~[illegible]~~ $[a, id] = [a, f]$. Aber $[\emptyset, c_f] = \tilde\pi(f)$, und $[a, id] = a$ wegen 5.8. Daher $\tilde\pi(f)(a) = [a, f]$.

$\dashv$

Lemma 5.10. $\tilde{\pi} \upharpoonright \alpha = \pi \upharpoonright \alpha$.

Beweis: Es ist $[\pi(\xi), pr] = [\emptyset, c_\xi]$ für alle $\xi < \alpha$, da dies aufgrund von Łoś äquivalent ist mit

$$(\{\pi(\xi)\}, \emptyset) \in \pi(\{(u,v) : pr(u) = c_\xi(v)\}).$$

Es ist aber $[\pi(\xi), pr] = \pi(\xi)$ wegen 5.8 und $[\emptyset, c_\xi] = \tilde{\pi}(\xi)$ nach Definition. $\dashv$

Man kann auch nachrechnen, daß $\tilde{\pi} > \pi$.

Lemma 5.11 $\bar{N} \models BS^k$, wobei $\beta = \bar{\beta} + k$, $\bar{\beta}$ Limeszahl und $k < \omega$.

Lemma 5.12 Es gibt ein $\tilde{\beta}$ mit $\bar{N} = L_{\tilde{\beta}}$.

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: β ist Nachfolgerordinalzahl, etwa $\beta = \bar{\beta} + k$, wobei $\bar{\beta}$ Limeszahl ist und $k < \omega$, $k > 0$.

Setze $\beta' = \bar{\beta} + k - 1$ (d.h. $\beta = \beta' + 1$). Dann ist $\tilde{\pi} \upharpoonright L_{\beta'} : L_{\beta'} \to_{\Sigma_\omega} \tilde{\pi}(L_{\beta'})$, und damit $\tilde{\pi}(L_{\beta'}) = L_{\tilde{\beta}'}$ für ein $\tilde{\beta}'$ $(\geq \tilde{\alpha})$ wegen 3.14.

Sei $x \in L_{\tilde{\beta}'+1} = Def(L_{\tilde{\beta}'})$, etwa

$$x = \{u \in L_{\tilde{\beta}'} : L_{\tilde{\beta}'} \models \varphi(u, [a_1, f_1], \dots, [a_k, f_k])$$

für eine Formel φ und $[a_1, f_1], \dots, [a_k, f_k] \in \bar{N}$.
Wir definieren $g : \mathrm{dom}(f_1) \times \dots \times \mathrm{dom}(f_k) \to L_\beta$ durch

$$g(u_1, \dots, u_k) = \{ u \in L_{\beta'} : L_{\beta'} \models \varphi(u, f_1(u_1), \dots, f_k(u_k)) \}.$$

Falls $n_0 = 0$, dann sind $f_1, \dots, f_k \in L_{\beta'+1}$, und man kann hier $f_1, \dots, f_k$ durch ihre Definitionen über $L_{\beta'}$ ersetzen und erhält $g \in L_{\beta'+1}$; falls $n_0 > 0$, dann verifiziert man, daß $g \in \Gamma$.
Wir fassen wieder g solcherart auf, daß
$(a_1 \cup \dots \cup a_k, g) \in \Gamma^*$.
Nun gilt für $[b, h] \in \bar{N}$: $[b, h] \in x$ gdw.
$[b, h] \in L_{\tilde{\beta}'} \wedge L_{\tilde{\beta}'} \models \varphi([b, h], [a_1, f_1], \dots, [a_k, f_k])$
gdw. $(b, a_1, \dots, a_k) \in \pi(\{(u, u_1, \dots, u_k) : h(u) \in L_{\beta'} \wedge$

$$L_{\beta'} \models \varphi(h(u), f_1(u), \dots, f_k(u))\})$$

gdw. $(b, a_1 \cup \dots \cup a_k) \in \pi(\{(u, v) : h(u) \in g(v)\})$
gdw. $[b, h] \in [a_1 \cup \dots \cup a_k, g]$. Damit ist $x = [a_1 \cup \dots \cup a_k, g] \in \bar{N}$, d.h. $L_{\tilde{\beta}'+1} \subset \bar{N}$.
Wir zeigen nun $\bar{N} \subset L_{\tilde{\beta}'+1}$.
Es gilt $L_\beta \models \forall x \; x \in \mathrm{Def}(L_{\beta'})$. Aufgrund von

3.9 ist dies Π_1 im Parameter $L_{\beta'}$, wegen 5.6 gilt also auch

$$\bar N \models \forall x \; x \in \mathrm{Def}(L_{\tilde\beta'}),$$

und damit $\forall x \in \bar N \;\; x \in L_{\tilde\beta'+1}$ wegen 5.11.
Wir haben gezeigt, daß $\bar N = L_{\tilde\beta'+1}$.

<u>Fall</u> 2 : β ist Limesordinalzahl.

Es gilt dann $L_\beta \models \forall x \, \exists y \, \exists \gamma \, (y = L_\gamma \wedge x \in y)$, wobei $y = L_\gamma$ die Formel aus 2.13 ist. Wegen 5.11 genügt es zu zeigen, daß

(*) $$\bar N \models \forall x \, \exists y \, \exists \gamma \, (y = L_\gamma \wedge x \in y).$$

Sei $[a, f] \in \bar N$.

<u>Fall</u> 2.1 $n_0 = 0$. Dann gilt $f \in L_\beta$, also $f \in L_\xi$ für ein $\xi < \beta$. Insbesondere gilt dann auch $f(u) \in L_\xi$ für alle $u \in \mathrm{dom}(f)$, und somit

$$(a, \emptyset) \in \pi(\{(u,v) : L_\beta \models f(u) \in L_{c_\xi(v)}\}).$$

Damit gilt dann $[a, f] \,\tilde\in\, \tilde\pi(L_\xi) = L_{\tilde\pi(\xi)}$, womit sich (*) ergibt.

<u>Fall</u> 2.2 $n_0 > 0$. Dann ist $f \in \Gamma$.

Wir definieren dann eine Funktion $g : \mathrm{dom}(f) \to L_\beta$ wie folgt: $g(u) = y$ gdw.

$\exists \tilde{\eta}\, \exists (L_\eta : \eta \leq \tilde{\eta})\, (f(u) \in L_{\tilde{\eta}} \wedge \forall_{\eta < \tilde{\eta}}\, f(u) \notin L_\eta \wedge y = L_{\tilde{\eta}})$.

Mit Hilfe (des Beweises von) 2.13 sieht man leicht, daß $g \in$ ~~L_β~~ Γ.

Es gilt aber nun

$$(a, a) \in \pi(\{(u, v) : L_\beta \models f(u) \in g(v)\}),$$

und damit $[a, f] \in [a, g]$. Man verifiziert, daß $[a, g] = L_{\tilde{\tilde{\eta}}}$ für ein $\tilde{\tilde{\eta}}$ und erhält sodann (*).