

Kurt Gödel (1906–1978)

Ralf Schindler

Kurt Gödel (库尔特·哥德尔) 无疑是 20 世纪前半叶最重要的逻辑学家。在 1920 年代和 1930 年代, 数理逻辑学和集合论仍处于它们的初创期, 也就是在那个时期, 哥德尔完成了一些足以影响未来的重要结果: 完全性定理, 不完全性定理, 以及他关于选择公理与 Cantor (康托尔) 连续统假设的无矛盾性的一些定理。他发展了一些至今在现代逻辑学和集合论中仍被使用着的方法, 尽管这些方法已经被改进和极大地被拓广了。

库尔特·哥德尔于 100 年前的 1906 年 4 月 28 日出生在维也纳以北 75 英里的捷克城市布尔诺 (Brno), 在当时它是奥匈帝国领地摩拉维亚 (Moravia) 的首府。当时缔结的“摩拉维亚和约”企图在摩拉维亚议会中缓解捷克与德国之间的紧张气氛, 但是, 在 1907 年前后, 民族主义的情绪完全控制了内莱塔尼亚 (Cislethania)¹⁾ 议会, 因而从 1909 年起就有了由政令法 (Law of Decree) 所规定的独裁统治。哥德尔的家庭属于日耳曼少数民族, 他的家庭是富有的; 库尔特的父亲是一个纺织厂的厂长, 并且他是布尔诺拥有克莱斯勒 (Chrysler) 汽车 (美产轿车品牌名——译注) 的第一人。1918 年, 在腐败的哈布斯堡 (Habsburg) 王室崩溃后, 建立了捷克斯洛伐克共和国, 因而哥德尔家族成为捷克斯洛伐克公民。“苏台德日耳曼人”党不断挑衅, 不久他们就得到国家社会主义分子 (即纳粹党徒——译注) 疯狂的支持。

在离开他在布尔诺的日耳曼高中后, 库尔特·哥德尔到维也纳学习物理学, 数学和哲学。从 1926 年起, 他开始参加由 Moritz Schlick 组织的维也纳学派的周四晚会议。参加者中有 Rudolf Carnap, Herbert Feigl, Hans Hahn 和 Otto Neurath。维也纳学派的气氛可能激发了哥德尔对于数学基础问题的兴趣。在那个年代中所讨论的关键问题恰是哥德尔所集中研究的那类问题, 并且这些问题将会在他的博士论文和他的带薪教职申请书 (Habilitationsschrift) 中获得完全的解决。

1928 年, 哥德尔首次见到 Adele Nimbursky, 后者的娘家姓 Porkert。她是维也纳的一个叫“Nachtfalter”的夜总会的舞女。显然, 他们之间的关系在哥德尔的家庭中引起了一些怨愤。直到 Adele 和库尔特结婚之后 10 年, 情形依然如此。1929 年, 哥德尔成为奥地利公民。1929 年 7 月 6 日, 哥德尔的博士论文“论逻辑演算的完全性 (Über die Vollständigkeit des Logikkalküls)”获奖, 论文导师是 Hans Hahn。然而, 也许是 Carnap (Frege 的一个学生) 把哥德尔的注意力引向完全性问题。一组给定的公理系统 G (即, 一组句子) 中的一

译自: EMS Newsletter, issue 62, December 2006, p.29–31, Kurt Gödel (1906–1978), Ralf Schindler. Copyright ©2006 the European Mathematical Society. Reprinted with permission. All rights reserved. 欧洲数学会与作者授予译文出版许可。

1) 内莱塔尼亚是奥匈帝国内奥地利部分的名称。该名称并非是一个官方名称。内莱塔尼亚继承了过去奥地利帝国的土地, 内莱塔尼亚的首都设在维也纳, 内莱塔尼亚意为莱塔 (Leitha) 河以西, 与莱塔河以东的匈牙利王国的外莱塔尼亚相对。——译注

个句子 j 的证明, 是句子的一个有限序列, 以句子 j 为其最后一个元素, 使得该序列的每个元素或者是 G 的一个元素, 或者是序列中前面若干句子在某个给定的逻辑演算的推理规则下的结果. 一阶逻辑的所有标准逻辑演算都证明了完全相同的句子. 哥德尔的完全性定理说, 存在这个证明的一个逻辑推理, 并且不需要拓广任何这样的逻辑演算: 若在 Γ 的所有模型中 φ 为真, 那么在 Γ 中必定存在 φ 的一个证明. 因为证明是有限的, 那么一个直接的推论是紧致性定理: 如果 Γ 是一个公理系统, 使得 Γ 的每个有限子集有一个模型, 那么 Γ 本身有一个模型. 利用紧致性定理, 容易对 Peano (佩亚诺) 算术或佩亚诺分析学构造一些非标准模型, 或者构造集合论的可数模型.

Hilbert (希尔伯特) 和 Ackermann (阿克曼) 非常清晰地阐述了一阶演算的完全性问题. Skolem (斯科伦) 在 1920 年代的论证几乎导致完全性定理的一个证明, 但是这些论证显示出缺乏某种 Plato (柏拉图) 式的勇气, 并且未能构造出必要的模型. 哥德尔本人提及 Carnap 的一份对某个另外的系统提出完全性定理的未发表的手稿, 但是只有哥德尔本人才有资格称得上证明了我们现在所谓的完全性定理. 1929 年 9 月 6 日, 哥德尔在柯尼斯堡 (现今的加里宁格勒) 的一个会议上谈及他的结果, 但是它的意义不是一下子就能明白了的. 此后, Leon Henkin 和 G. Hasenjäger 分别于 1947 年和 1950 年 (在哥德尔的发现的 20 年之后!) 在他们的学位论文中简化了哥德尔的原始证明.

现代模型理论初次出现于完全性定理的证明中时, 就极大地改进了模型构造的方法. 这样一些工具使 E. Hrushovski 得到了几何学的 Mordell Lang 猜想的证明.

哥德尔的父亲于 1929 年去世. 库尔特·哥德尔就靠遗产生活. 1932 年他递交了带薪教职申请, 并于 1933 年 3 月 11 日成为一个编外讲师. 哥德尔从未有过如在维也纳大学中的严肃职位; 他在此教书, 并从听他课的学生处获得他们必须付给的报酬. 哥德尔的第一个 (也是唯一一个) 永久性的职位将是在普林斯顿 (Princeton) 高等研究院 (IAS) 的职位.

希尔伯特曾提问, 要找数论公理系统的无矛盾性的一个有限论的证明 (术语“有限论的”从未被定义过). 这个任务, 就是希尔伯特的第 2 问题, 也以“希尔伯特纲领”著称. 哥德尔在其带薪教职申请中证明了, 这样一种无矛盾性的证明原则上是不可能的: 令 Γ 是一个无矛盾的、递归可枚举的公理系统, 它足够地强, 即它包含数论的某个片段 (所要求的数论的片段弱于通常的佩亚诺算术系统). 哥德尔的第一不完全性定理说: 存在一个句子 φ , 使得 φ ¹⁾ 及其否定 $\neg\varphi$ 在 Γ 中都是不可证明的. 他的第二不完全性定理给出了这样句子 φ 的一个例子. 其证明利用了 Cantor (康托尔) 用于证明实数集的势大于整数集的势的对角线论证. 借助于现在称为的“哥德尔化”, 也就是用简单可计算的表达式等同关于整数的形式系统的表达式, 哥德尔在数论语言中造了一个句子 φ , 它表示“在 Γ 中我是不可证的”; 因而它在 G 中是不可证的, 并且因而它亦为真. 事实上, $\varphi =$ “在 Γ 中我是不可证的”, 当且仅当, j ²⁾ 为真与 Γ 是无矛盾的等价. 因而 Γ 的无矛盾性在 Γ 中是不可证的.

1) 此处原文误为“ \neg ”.——译注

2) j 为与 φ 相应的形式系统 G 中的表达式.——校注

作为一个推论，哥德尔的证明导致了“在形式语言中不能定义真谓词”这一事实，因为否则我们可以考虑表示“我不为真”的句子。这些问题越有刺激性，对它们的理解便越加不易，因而哥德尔虽在流行的数学文献中无处不在，但他的成就不总是能在这些文献中被准确地报道。

1931年9月在Bad Elster召开的德国数学会的一次会议上哥德尔谈到了他的不完全性结果。哥德尔在那里第一次遇到Ernst Zermelo(策梅洛，现代集合论标准公理化系统ZFC之父)，策梅洛不能完全领悟哥德尔新定理的要旨。其他人也同样有一些问题。希尔伯特在1931年时已经知道了哥德尔的不完全性定理，并且马上意识到对他的纲领的影响。事实上，鉴于哥德尔的结果，用有限论来证明数论公理系统无矛盾性的任务意味着彻底的崩溃！希尔伯特和P. Bernays于1939年写的书首次把不完全性定理写进教科书中。

近代证明理论详细地研究我们如何能证明数论系统或分析学系统的无矛盾性。利用Gentzen(根岑)在1930年代的有巨大影响的工作我们知道，沿着一个长度的良序 ϵ_0 运用归纳方法就足够了(并且这是最好的可能)。

哥德尔在新泽西州的普林斯顿的高等研究院度过了1933—34学术年。1934年秋天他不得不进行精神病治疗；他在邻近维也纳的Purkersdorf的一个医院里至少待了一个星期。这并非是他最后一次住院治疗精神病。

不完全性定理的一个亲戚是Church(丘奇)关于在一个足够强的公理系统G中全体可证明语句的集合的不可判定定理。

哥德尔对可计算性问题总是有兴趣的。1930年代Alan Turing(图灵)开始研究理论计算机科学的基础是什么的问题。哥德尔从1936年起处理复杂性理论的问题，其论文“论证明的长度”再一次预测了未来的发展。

1934年奥地利政府宣布，除了祖国阵线(Vaterländische Front)和爱国阵线(Patriotic Front)外，所有政党都是非法的。Dollfuß(陶尔斐斯)¹⁾拟与意大利法西斯联盟反对德国。在1934年7月25日纳粹党人的未遂政变中陶尔斐斯被杀。当意大利军队部署在Brenner时德国停止了它的支持。

在这段动乱的时期，哥德尔对集合论和希尔伯特第1问题产生了兴趣。1934年他成功地证明了选择公理AC和集合论的标准公理系统ZF中剩下的公理的相对无矛盾性。尽管AC有明显的悖论推论——如单位球的Hausdorff(豪斯多夫)分解——这一事实，但是把AC加之于ZF并不产生矛盾。在1937年6月14日的夜间，哥德尔完成了他的证明，据此，广义连续统假设GCH相对于 $ZFC = ZF + AC$ 也是无矛盾的。这个结果于1938年发表在美国国家科学院会报(Proceedings)上。

借助于所有可构成集的内模型L，他证明了这两个相对无矛盾性结果；他把内模型剔出以专为这些证明而用。L是简单集合论函数(即，初始(rudimentary)函数的生成元)的一个有限类下所有序数的类的闭包。这蕴涵着，L是包含所有序数的ZF的最小(传递)模型。用一种统一形状把L分层，这使得哥德尔证明了：不仅ZF，而且AC也在L中。关于

1) 陶尔斐斯，1892.10.4—1934.7.25，于1932年出任奥地利第14任总理，次年逐渐走向独裁，1934年在维也纳总理官邸遭10名纳粹党人暗杀。——译注

L 的凝聚引理最终得出了广义连续统假设 (的一个强形式) 在 L 中为真的一个简明证明。

在逻辑学的初级阶段之末, 哥德尔得到了完全性定理和不完全性定理, 与此同样重要的是, 哥德尔发现了 L, 这些成果使集合论成为相当高深的学科. 在 1970 年代, Ronald Jensen (延森) 开始了可构成性的研究, 这是对哥德尔研究的改进. 延森得到的“精细结构理论”证明了一些令人惊叹的定理. 这个理论和内模型理论——当代集合论的两个非常活跃的分支——导致了对数学世界的局部结构和整体结构重要而令人振奋的认识.

在 1935—38 年间, 哥德尔经常访问美国. 他的恐惧症问题似乎更糟了. 他显现出对被毒害——尤其是通过他的食物——的巨大恐惧. 他从未从精神病中恢复, 并且最终证明这是致命的.

1938 年, Schuschnigg¹⁾ 在 Berchtesgaden²⁾ 访问希特勒. 他们两人商定立 Seyß-Inquart³⁾ 为奥地利的新内政部长. 1939 年 3 月 12 日是奥地利归属于德国 (“德奥合并”) 的日子, 1939 年 4 月 2 日希特勒在维也纳的 Heldenplatz 组织了一个庆典. 哥德尔自动地变成了德国人.

库尔特·哥德尔在政治上是幼稚的. 1939 年, 他在维也纳的 Strudlhofstiege 附近遭到青年国家社会主义党徒的袭击. 流言说, Adele 用伞成功地保护了他. 在 1939 年 3 月间, “编外讲师”的称号被终止而建立了“新制度的讲师”. 一场看似无希望的文书工作战争开始了, 这被认为是安排哥德尔移民到美国所必需的. 最后, Adele 和哥德尔于 1940 年 1 月 18 日离开了维也纳. 他们乘火车经柏林和莫斯科到了 Vladivostok (符拉迪沃斯托克, 即海参崴——译注), 然后从 Yokohama (横滨) 乘轮船, 于 1940 年 3 月 4 日到达旧金山. 从旧金山, 他们又到了新泽西州的普林斯顿. 此后, 哥德尔从未再回欧洲.

哥德尔于 1948 年成为美国公民, 那是他在高等研究院工作, 但他直到 1953 年才成为教授. 他证明连续统假设独立于 ZFC 的多次尝试都失败了. 他转而对广义相对论 (Einstein (爱因斯坦) 是他在 IAS 的同事) 以及哲学有了兴趣. 作为一个柏拉图主义者, 哥德尔从未持有这样的看法: 如果连续统假设被证明与 ZFC 是独立的, 那么连续统问题就被解决了.

而这恰是 Paul Cohen (科恩) 所解决的——他注意到了调和与分析. 他发明了“力迫法”, 由此, 实数与 ZFC 的可数模型以下数方式相联系: 拓广的模型仍满足 ZFC, 连续统假设之否定也满足 ZFC. 这样, 最终就有一个用 ZFC 来观察哥德尔的第一不完全性定理的数学上的重要陈述. 当代的集合论提供了多个这样的惊人陈述. 科恩得到了哥德尔本人的认同. 1966 年, 科恩获得了至今为止给予数理逻辑学领域中优异工作的唯一的一枚菲尔兹奖章. 此后, 科恩对集合论失去了兴趣. 然而, 他的成就, 以及由 R. Solovay 及其他人的进一步发展, 把集合论变成为一个困难而活跃的研究领域. 正如我们现在所知, 集合论只有 40 岁, 还很年轻.

1) 全名 Kurt von Schuschnigg, 1897.12.14—1977.11.18, 奥地利政治家, 他于 1934 年接替被刺杀的陶尔斐斯成为奥地利第一共和国的总理.——译注

2) 位于德国巴伐利亚州东南部的阿尔卑斯山脚下, 二战时期以希特勒的“鹰巢”而闻名.——译注

3) 全名 Arthur Seyß-Inquart, 1892.7.22—1946.10.16, 奥地利第一共和国末任总理, 在其数日任期内完成德奥合并. 二战期间任德占荷兰总督. 于纽伦堡审判中被判处绞刑.——译注

哥德尔期望,有朝一日驳倒连续统假设的一些令人信服的公理将被剥离出来. 在 1970 年代, 在他关于“度 (scale)”的著作中推测出这样的公理. 他的“平方公理”主要是: 对于每个整数 n , 所有从 ω_n 到 ω_n 关于模为 Fréchet (弗雷歇) 滤子的全体函数的集合的共尾数等于 ω_{n+1} . 不幸的是哥德尔的经验并不成功. 似乎哥德尔有这样的观点 (至少在某些时候): 应该有 \aleph_2 实数.

关于连续统大小的问题, 仍然是当代集合论研究的强大 (但有时是隐蔽的) 动力之一. “正常力迫公理”推广了 Martin (马丁) 公理, 并且在集合论拓扑中非常有用; 它蕴涵着存在 \aleph_2 实数. 此蕴涵关系的论证, 有点类似于哥德尔在其有关“度”的著作中试图得到的证明方法. W. Hugh Woodin (伍庭) 基于力迫绝对性和在描述集合论中经深刻洞察的某些事实 (这些事实中的一部分可由可构成性方法得到), 近来提出了一种精巧的证明路线, 企图驳倒连续统假设. 伍庭的论证受到 M. Foreman 和 J. Steel 的攻击, 但是它们无疑是现代集合论研究的一种推动力.

在美国, 哥德尔已不再能得到如他在维也纳时得到的同样水平的数学成果. 他获得很多荣誉, 例如“国家科学奖章”. 但是在 1977 年 6 月, Adele 需做手术, 而没有妻子喂他, 哥德尔拒绝吃任何东西. 由于“由性格障碍引起的营养不良和衰竭”, 哥德尔于 1978 年 1 月 14 日去世. 他的妻子亦于 3 年后去世.

Oskar Morgenstern (摩根斯特恩)¹⁾ 在其日记中写道: “他 (哥德尔) 既渊博, 又天真, 真难以理解.” 哥德尔的杰出遗产在逻辑学和集合论中是无处不在的. 他的全集为:

Gödel, Kurt, Collected Works, 5 volumes, S. Feferman et al. eds., Oxford University Press, 1986ff.

本文最先以德文刊登于 DMV-Mitteilungen 14-1 (2006), pp.42-45. 由作者译成英文. 作者感谢 Gunter Fuchs 的一些意见.

(陆柱家 译 黄且圆 校)

(上接 384 页)

因而,

$$\left| \int_{-\sqrt{t}/2}^{\sqrt{t}/2} g_t(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\sqrt{t}/2}^{\sqrt{t}/2} |y|^3 e^{-y^2/6} dy + \int_{|y| > \sqrt{t}/2} e^{-y^2/2} dy.$$

因而

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\sqrt{t}/2}^{\sqrt{t}/2} g_t(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}.$$

将此式与 (1) 式组合起来, 得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(t+1)e^t}{\sqrt{2\pi}t^{t+1/2}} = 1.$$

参考文献 (略)

(陆柱家 译 陆昱 校)

1) 摩根斯特恩, 1902.1.24—1977.7.26, 德国出生的奥地利经济学家. 他与 von Neumann 在 1940 年代共同奠定了效用理论的基础.——译注