Andere zitierte Arbeiten

[Bo] A. Borel, Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups, Amer. Math. Soc., 2001

[BJ] A. Borel und L. Ji, Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces, Birkhäuser (2006)

[DG] P. Deligne und B. Gross, On the exceptional series, and its descendants, C. R. Acad. Sc. Paris, 935 (2002), 877–881

[HJP] P. Henry-Labordère, B. Julia und L. Paulot, Real Borcherds superalgebras and M-theory, J. High Energy Phys. (2003), no. 4 060æ

[HR] B. Hughes und A. Ranicki, Ends of Complexes, Cambridge Univ. Press (1996)

[K] C. Keitel, Erinnerungen an Hans Freudenthal (1905–1990), DMV-Mitteilungen 13-3/2005, 176–181

[LM] J. M. Landsberg und L. Manivel, The projective geometry of Freudenthal's magic square, J. Alg. 239 (2001), 477–512

[R] M. Ronan, Lectures on Buildings, Perspectives in Mathematics, vol. 7, Acad. Press, Boston (1989)

[St] J. R. Stallings, On torsion-free groups with infinitely many ends, Ann. of Math. 88 (1968), 312–334

[T] J. Tits, Buildings of Spherical Type and Finite BN-pairs, Lect. Notes in Math, Nr. 386, Springer-Verlag (1974)

[R] D. C. Ravenel, Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres. Amer. Math. Soc. (2004)

[W] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques, Hermann, Paris (1940)

Adresse des Autors

Prof. Dr. T. A. Springer
Mathematisch Instituut
Budapestlaan 6
3584 CD Utrecht
Niederlande
springer@math.uu.nl

Kurt Gödel (1906–1978)

von Ralf Schindler

Kurt Gödel ist zweifelsohne der bedeutendste mathematische Logiker der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. In den 20er und 30er Jahren, als Logik und Mengenlehre noch in den Kinderschuhen steckten, erzielte er bahnbrechende und weit in die Zukunft deutende Resultate: den Vollständigkeitssatz, die Unvollständigkeitssätze, sowie die Sätze über die Konsistenz des Auswahlaxioms und der Cantorschen Kontinuumshypothese. Seine Arbeiten stellen Methoden vor, die noch heute in ausgefeilter und angereicherter Form zu den wichtigsten Hilfsmitteln der mengentheoretischen und logischen Forschung gehören.

Vor 100 Jahren, am 28. April 1906, wurde Kurt Gödel in Brünn, der damaligen Hauptstadt der österreichisch-ungarischen Markgrafschaft Mähren, geboren. Der „Mährische Ausgleich" von 1905 sollte vordergründig das Miteinander von Tschechen und Deutschen im mährischen Landtag regeln, doch hitziger Nationalismus führte dazu, dass der übergeordnete cisleithanische Reichsrat ab 1907 arbeitsunfähig wurde und seit 1909 autoritär mit Verordnungsrecht regiert werden konnte. Gödels Familie gehörte der deutschen Minderheit an. Die Gödels waren wohlhabend, der Vater war Direktor einer Textilfabrik und der erste Besitzer eines Chryslers in Brünn. 1918, nach dem Zusammenbruch des korrupten Habsburger Regimes, wird die Tschechoslowakische Republik gegründet. Auch die Gödels sind nun tschechoslowakische Staatsbürger. „Sudetendeutsche" Verbände treten jedoch weiterhin agressiv auf, später mit wahnhafter Unterstützung des Nationalsozialismus.

Kurt Gödel absolviert das staatliche deutsche Realgymnasium in Brünn und übersiedelt 1924 nach Wien, um Physik, Mathematik und Philosophie zu studieren. Ab 1926 besucht er die Donnerstag-Abend-Treffen des Wiener Kreises, die von Moritz Schlick organisiert werden. Weitere Teilnehmer an diesen Treffen waren u. a. Rudolf Carnap, Herbert Feigl, Hans Hahn und Otto Neurath. Ganz sicher hat die Atmosphäre des Wiener Kreises Gödels Interesse an grundlagentheoretischen Fragen der Mathematik geweckt. An solche Fragen, die damals im Raum standen, ist Gödel außergewöhnlich zielstrebig herangegangen. Sie haben in seiner Dissertation und in seiner Habilitation erschöpfende Antworten gefunden.

1928 lernt er Adele Nimbursky, geb. Porkert, kennen, die, wie man erzählt, als Bartänzerin im Wiener „Nachtfalter" auftritt. Die Beziehung scheint einen gewissen Aufruhr in der Familie verursacht zu ha-

Gödel und Adele Nimbursky
am Hochzeitstag

ben. Erst zehn Jahre später werden Adele und Kurt heiraten. 1929 wird Kurt Gödel, auf seinen Antrag hin, die österreichische Staatsbürgerschaft gewährt.

Am 06. 7. 1929 promoviert Gödel bei Hans Hahn in Wien mit der Arbeit „Über die Vollständigkeit des Logikkalküls". Es gilt als wahrscheinlich, dass Gödel durch Carnap (der Schüler von Frege war) auf das Vollständigkeitsproblem aufmerksam gemacht wurde. Ein Beweis eines Satzes φ aus einem Axiomensystem (d. h. einer Menge von Sätzen) Γ ist eine endliche Folge von Sätzen mit letztem Glied φ, wobei jeder dieser Sätze entweder Axiom aus Γ ist oder mittels einer Regel eines fest gegebenen Logikkalküls aus früheren Sätzen hervorgeht. Alle Standard-Logikkalküle für die Logik 1. Stufe beweisen dieselben Sätze. Gödels *Vollständigkeitssatz* besagt, dass unsere Logikkalküle keiner Erweiterung bedürfen und fähig sind: wenn φ in jeder Struktur gilt, die alle Axiome aus Γ erfüllt, dann gibt es einen Beweis von φ aus Γ. Eine unmittelbare Konsequenz ist der *Kompaktheitssatz*: wenn jede endliche Teilmenge eines Axiomensystems Γ konsistent ist (d. h. kein Beweis von $0 = 1$ existiert), dann ist Γ selbst erfüllbar. Mit Hilfe des Kompaktheitssatzes lassen sich sehr leicht etwa Nichtstandard-Modelle der Peano-Arithmetik bzw. der Analysis oder abzählbare Modelle der Mengenlehre konstruieren.

Hilbert und Ackermann hatten das Vollständigkeitsproblem deutlich formuliert. Aus heutiger Sicht gibt es Argumente bei Skolem aus den frühen 20er Jahren, die den Beweis des Vollständigkeitssatzes fast vorwegnehmen, denen aber doch der platonistische Mut zur erforderlichen Modellkonstruktion fehlt. Gödel selbst erwähnt ein unveröffentlichtes Manuskript von Carnap, das einen verwandten Vollständigkeitssatz präsentiert. Am 6. 9. 1929 trägt Gödel auf einer Tagung in Königsberg über seinen Vollständigkeitssatz vor; man sieht nicht unmittelbar die Tragweite seines Ergebnisses. Der Beweis des Vollständigkeitssatzes wird später u.a. durch Leon Henkin und G. Hasenjäger vereinfacht, die 1947 bzw. 1950 (also ca. 20 Jahre später) auf diesem Gebiet promoviert haben.

Die heutige Modelltheorie hat die Methoden der Modellkonstruktion, wie sie im Beweis des Vollständigkeitssatzes erstmalig zu sehen waren, in dramatischer Weise verfeinert. Derartige Hilfsmittel erlaubten es beispielsweise E. Hrushovski in den 90er Jahren, die geometrische Mordell-Lang-Vermutung zu beweisen.

1929 stirbt Gödels Vater. Kurt Gödel lebt nun von der Erbschaft. 1932 legt Gödel seine Habilitationsschrift vor. Am 11. 3. 1933 wird er Privatdozent. Gödel hatte nie eine darüber hinausgehende Anstellung an der Universität Wien. Er erhält Lehraufträge und kassiert Gebühren, die Studierende für den Besuch seiner Vorlesungen entrichten. Gödels erste (und einzige) feste Anstellung ist diejenige, die er am Institute for Advanced Studies in Princeton bekommt.

David Hilbert hatte dazu aufgefordert, einen finitistischen Beweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome der Zahlentheorie zu finden. (Dabei wurde „finitistisch" nie formal definiert.) Dieser Auftrag, das 2. Hilbertsche Problem, wird als das „Hilbertsche Programm" diskutiert. Gödels Habilitation zeigte, dass ein derartiger Widerspruchsfreiheitsbeweis prinzipiell nicht möglich ist. Sei Γ ein konsistentes rekursiv aufzählbares Axiomensystem, das hinreichend stark ist, insofern es ein gewisses Fragment der Zahlentheorie enthält. (Dieses erforderte Fragment der Zahlentheorie ist wesentlich schwächer als das System der Peano-Arithmetik.) Dann besagt der *Erste Unvollständigkeitssatz*, dass ein Satz φ existiert, so dass weder φ noch die Negation von φ aus Γ beweisbar ist. Der *Zweite Unvollständigkeitssatz* liefert ein Beispiel für einen derartigen Satz φ. Dabei gebraucht Gödel das Diagonalargument, das Georg Cantor für seinen Beweis der Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen benutzt hatte. Mit Hilfe von „Gödelisierung", d. h. einer einfach zu berechnenden Injektion, die Ausdrücke der formalen Sprache mit natürlichen Zahlen identifiziert, produziert Gödel einen Satz φ der Sprache der Zahlentheorie, der ausdrückt: „Dieser Satz ist nicht in Γ beweisbar" und der demzufolge nicht in Γ beweisbar sein kann, also schließlich auch *wahr* sein muss.

Gödels Beweis liefert als Korollar sofort, dass das Wahrheitsprädikat nicht formalsprachlich definierbar sein kann, da sonst „Dieser Satz ist nicht wahr" als ein formalsprachlicher Satz formulierbar wäre. Dank dieser Merkmale, die umso aufregender werden, je unklarer man sie versteht, fand Gödel einen triumphalen Einzug in die populärwissenschaftliche Literatur, in der nicht nur intelligente Dinge darüber zu lesen sind.

Im September 1931 trägt Gödel im Rahmen der DMV-Tagung in Bad Elster über seine Unvollständigkeitsresultate vor. Ernst Zermelo, auf den das heutige Standard-Axiomensystem ZFC der Mengenlehre zurückgeht, und den Gödel bei dieser Tagung kennenlernt, kann den Gödelschen Beweisen nicht folgen. Auch andere haben Schwierigkeiten. Hilbert hat bereits spätestens Anfang 1931 von den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen erfahren. Er sieht gleich ihre Bedeutung für sein Programm, das nun in der ursprünglichen Form zum völligen Scheitern verurteilt ist. P. Bernays hat mit ihm 1939 die erste lehrbuchartige Darstellung der Unvollständigkeitssätze vorgenommen.

Die heutige Beweistheorie studiert genau, mit welchen Mitteln die Konsistenz von Systemen der Zahlentheorie oder Analysis bewiesen werden kann. Bahnbrechend ist hier Gentzens Arbeit aus den 30er Jahren, in der dieser zeigt, dass Induktion längs einer Wohlordnung der Länge ϵ_0 erlaubt, die Konsistenz der Peano-Arithmetik zu beweisen.

Das akademische Jahr 1933–34 verbringt Gödel erstmalig am Institute for Advanced Studies in Princeton, New Jersey. Im Herbst 1934 muss er sich in psychiatrische Behandlung begeben; er verbringt mindestens eine Woche im Sanatorium Purkersdorf bei Wien. Es sollte nicht sein letzter derartiger Aufenthalt bleiben.

Ein Verwandter der Unvollständigkeitssätze ist der Churchsche Satz über die Nichtentscheidbarkeit der Menge aller in einem hinreichend starken Axiomensystem Γ beweibaren Sätze. Gödel hat sich immer mit Fragen der Berechenbarkeit auseinandergesetzt. In den 30er Jahren beginnt A. Turing, sich mit den Grundlagen der theoretischen Informatik zu befassen. Gödels Arbeit „Über die Länge von Beweisen“ von 1936 nimmt Fragestellungen der heutigen Komplexitätstheorie voraus.

1934 werden in Österreich alle Parteien außer der „Vaterländischen Front“ verboten. Dollfuß versucht eine Allianz mit dem faschistischen Italien gegen das Deutsche Reich. Im Zuge des nationalsozialistischen Putschversuches am 25. 7. 1934 wird Dollfuß ermordert. Als Italiens Truppen am Brenner aufmarschieren, distanziert sich das Deutsche Reich.

In dieser politisch und persönlich unruhigen Zeit wendet sich Gödel der Mengenlehre und dem 1. Hilbertschen Problem zu. 1934 gelingt es ihm, die relative Konsistenz des Auswahlaxioms AC mit den übrigen Standard-Axiomen ZF der Mengenlehre zu beweisen. Die Hinzunahme von AC führt also zu keinen Widersprüchen, auch wenn sich mit Hilfe von AC paradox anmutende Konstruktionen durchführen lassen, wie etwa die bereits von Haussdorff gefundene Kugelzerlegung. In der Nacht vom 14. auf den 15. Juni 1937 vollendet Gödel seinen Beweis, wonach die Allgemeine Kontinuumshypothese relativ konsistent mit $\mathsf{ZFC} = \mathsf{ZF} + \mathsf{AC}$ ist. Das Ergebnis wird 1938 in den Proceedings of the National Academy of Sciences, USA veröffentlicht.

Gödel zeigt beide Resultate zur relativen Konsistenz mit Hilfe des von ihm gefundenen Inneren Modells L aller konstruktiblen Mengen. L ist der Abschluss der Klasse aller Ordinalzahlen unter einer Familie einfacher mengentheoretischer Funktionen, so dass L in der Tat das minimale (transitive) Modell von ZF ist, das alle Ordinalzahlen enthält. Der kontrollierte Generierungsprozess, den L selbst nachvollziehen kann, erlaubt es, ZF und vor allem auch AC in L zu zeigen. Das „Kondensationslemma“ für L erlaubt schließlich den Beweis der Allgemeinen Kontinuumshypothese in L.

Ebenso wie der Vollständigkeitssatz und die Unvollständigkeitssätze die Logik aus der Unbedarftheit befreit haben, so wurde eigentlich erst durch Gödels Entdeckung von L die Mengenlehre zu einer nichttrivialen Disziplin. In den 70er Jahren hat Ronald Jensen begonnen, die Methode der Konstruktibilität zu verfeinern; mit Hilfe seiner „Feinstrukturtheorie“ konnten er und später auch andere spektakuläre Resultate erzielen. Die Feinstrukturtheorie und die Theorie der Inneren Modelle, sehr aktive Zweige der gegenwärtigen Mengenlehre, liefern überraschende und wichtige Einsichten zur lokalen und globalen Struktur des mathematischen Universums.

In den Jahren 1935–38 hält sich Gödel mehrfach in den USA auf. Während dieser Zeit scheinen sich auch Gödels phobische Neigungen verhärtet zu haben. Er entwickelte eine starke Angst vor Vergiftung, insbesondere durch Lebensmittel. Eine Heilung dieser Krankheit gelang nie. Sie wurde ihm schließlich zum Verhängnis.

1938 besucht Schuschnigg Hitler in Berchtesgaden, wo man sich auf den Nationalsozialisten Seyß-Inquart als Innenminister einigt, am 12. 3. 1938 erfolgt der „Anschluss“ Österreichs an Deutschland. Am 2. April 1938 lässt sich Hitler auf dem Wiener Heldenplatz feiern. Gödel ist jetzt automatisch Reichsdeutscher.

Kurt Gödel ist politisch naiv. 1939 greift ihn bei der Strudlhofstiege in Wien ein Trupp junger Nazis an, die ihn für einen jüdischen Intellektuellen halten. Adele, so will es die Legende, schlägt sie mit ihrem Regenschirm in die Flucht. Im März 1939 werden die Privatdozenturen abgeschafft, „Dozenten neuer Ordnung“ eingeführt. Gödel wird arbeitslos und bekommt von der Wehrmacht die Mitteilung, sich zur Musterung zu melden. Ein scheinbar aussichtsloser Papierkrieg startet, der die Ausreise in die USA ermöglichen soll. Am 18. 1. 1940 verlassen Adele und Kurt Gödel Wien. Sie reisen mit dem Zug über Berlin und Moskau nach Wladiwostok, von Yokohama mit dem Dampfschiff nach San Francisco, wo sie am 4. 3. 1940 eintreffen. Von dort geht die Reise weiter nach Princeton, New Jersey. Kurt Gödel wird nie wieder nach Europa zurückkehren.

Gödel wird 1948 US-amerikanischer Staatsbürger. Er arbeitet nun am Institute for Advanced Studies, allerdings erst ab 1953 als Professor. Nach erfolglosen Versuchen, die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese von ZFC zu zeigen, wendet er sich der Allgemeinen Relativitätstheorie (Einstein ist sein Kollege am IAS!) und vor allem der Philosophie zu. Als Platonist glaubte Gödel niemals, dass die Frage nach der Größe des Kontinuums beantwortet wäre, wenn gezeigt wäre, dass die Kontinuumshypothese unabhängig von ZFC ist.

Letzteres wurde im Jahre 1963 von Paul Cohen geleistet, der aus der harmonischen Analysis kommt. Die von ihm entwickelte Methode des „Forcing" erlaubte es ihm, reelle Zahlen so zu abzählbaren Modellen von ZFC zu adjungieren, dass daraus Modelle von ZFC resultieren, in denen die Kontinuumshypothese verletzt ist. Damit ist endlich eine mathematisch bedeutende Aussage φ gefunden, die den 1. Unvollständigkeitssatz bezeugt. Die gegenwärtige Mengenlehre bietet eine unüberschaubare Fülle weiterer Beispiele. Cohen holte bei Gödel persönlich den „Stempel der Zustimmung" ab. 1966 erhielt Cohen die einzige Fields-Medaille, die bislang für eine Arbeit auf dem Gebiet der Logik vergeben wurde. Cohen hat sich seither nicht mehr wirklich mit Mengenlehre beschäftigt. Allerdings hat seine Errungenschaft und deren schnelle Weiterentwicklung durch R. Solovay und andere die Mengenlehre in ein wirklich schwieriges und aktives Gebiet verwandelt. Die Mengenlehre, wie wir sie heute kennen, ist 40 Jahre jung!

Gödel erwartete, dass eines Tages glaubwürdige Axiome gefunden würden, die die Kontinuumshypothese widerlegen. Gödel selbst hat in den 70er Jahren in seinen Arbeiten über „Funktionenskalen" mit Kandidaten für derartige Axiome herumexperimentiert. Seine „Quadrataxiome" beispielsweise sagen, dass für natürliches n die Kofinalität der Menge aller Funktionen von ω_n nach ω_n, modulo dem Fréchet-Filter, gleich ω_{n+1} ist. Leider waren Gödels diesbezügliche Untersuchungen nicht von durchschlagendem Erfolg. Es scheint aber, dass Gödel zumindest zeitweise der Auffassung war, es müsse $\aleph_2$ reelle Zahlen geben.

Die Frage nach der Größe des Kontinuums ist immer noch eine *der* hintergründig treibenden Kräfte der gegenwärtigen mengentheoretischen Forschung. Das „Proper Forcing Axiom", das Martins Axiom verallgemeinert und das wie dieses in der mengentheoretischen Topologie sehr nützlich ist, impliziert, dass es $\aleph_2$ reelle Zahlen gibt. Dabei sind die Argumente nicht unähnlich zu den Argumenten aus Gödels „Funktionenskalen"-Arbeiten. W. Hugh Woodin hat kürzlich eine ausgefeilte Argumentation gegen die Kontinuumshypothese vorgelegt, die auf Betrachtungen von Forcing-Absolutheit und tiefen Resultaten zur deskriptiven Mengenlehre beruht, die u. a. mit Hilfe von Methoden der Konstruktibilität gewonnen werden. Woodins Argumente werden durch M. Foreman und J. Steel angegriffen, sie sind aber in jedem Falle ein Stimulans heutiger Forschung.

In den USA konnte Gödel nicht mehr Mathematisches von dem Range leisten, wie er dies in Wien getan hatte. Er erhielt vielfältige Auszeichnungen, etwa die „National medal of science". Im Juni 1977 muss sich Adele Gödel einer Operation unterziehen. Ohne die Bewirtung durch seine Frau verweigert Kurt Gödel jegliche Nahrung. Er stirbt am 14. Januar 1978 an „durch Persönlichkeitsstörung verursachter Unterernährung und Auszehrung". Seine Frau stirbt drei Jahre darauf.

Oskar Morgenstern schreibt in sein Tagebuch: „Er [Gödel] war sehr spaßig, in seiner Mischung von Tiefe und Weltfremdheit." Niemand hat bei Gödel promoviert. Aber sein gewaltiges mathematisches Vermächtnis ist in Logik und Mengenlehre allgegenwärtig.

Gödels Gesamtwerk erscheint als [2]. Eine erschöpfende Biographie bietet [1]. Kurt Gödel wird in diesem Jahr durch mehrere Ereignisse herausgehoben, die unter der Adresse `http://www.aslonline.org` der Association for Symbolic Logic zu finden sind.

Literatur

[1] Dawson, John W., *Logical Dilemmas. The life and Work of Kurt Gödel*, A K Peters, 1997.

[2] Gödel, Kurt, *Collected Works*, 5 Bände, hrsg. von S. Feferman et al., Oxford University Press, 1986ff.

Adresse des Autors
Prof. Dr. Ralf Schindler
Institut für mathematische Logik und
Grundlagenforschung, Universität Münster
Einsteinstraße 62, 48149 Münster
`rds@math.uni-muenster.de`

Ralf Schindler wurde am 19. 2. 65 in Erlangen geboren. Studium der Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie in München, 1996 Promotion, 1996–97 Assistent bei Prof. Koepke in Bonn, 1997–99 Research fellow an der UC Berkeley (USA), 1999–2001 Assistent an der Universität Wien. 2001 Habilitation an der HU Berlin. 2001–03 Ao. Univ.-Professor an der Universität Wien. Seit 1. 11. 03 C4-Professor an der WWU Münster, Lehrstuhl für Mathematische Logik und Grundlagenforschung.