ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

— BLATT 1 —

Arthur Bartels, Roman Sauer 13. Oktober 2008

Übung 1. Sei X ein endlicher wegzusammenhängender CW-Komplex und $p\colon \tilde{X} \to X$ eine endliche Überlagerung. (Eine Überlagerung heisst endlich falls $N := |p^{-1}(x)|$ für alle $x \in X$ endlich ist.) Finden Sie ein Formel, die die Eulercharakteristik von X und $\tilde{X}$ in Verbindung setzt. Dazu müssen Sie eine geeignete CW-Struktur auf $\tilde{X}$ finden, deren Existenz Sie nicht im Detail nachzuweisen brauchen.

Übung 2. Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $n \geq 2$. Konstruieren Sie einen endlichen CW-Komplex X so, dass $\tilde{H}_n(X) \cong A$ und $\tilde{H}_k(X) = 0$ für $k \neq n$.

Übung 3. Berechnen Sie die folgenden Tensorprodukte:

a) $3\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3$

b) $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[t^2]} \mathbb{Z}[t]$

c) $\mathbb{Z}/17 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5$

Bei Aufgabe b) ist die Ringstruktur des Polynomrings $\mathbb{Z}[t^2]$ auf $\mathbb{Z}$ durch $p \cdot x = p(1)x$ für $p \in \mathbb{Z}[t^2]$ und $x \in \mathbb{Z}$ gegeben.

Übung 4. Sei R ein kommutativer Ring, und seien A, B und C drei R-Moduln. Zeigen Sie, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_R(A \otimes_R B, C) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(B, C))$$

gibt. Spezifizieren Sie dazu, was *natürlich* in diesem Kontext sinnvollerweise bedeuten sollte.

Abgabe bis Mo, 20. Oktober in den Übungsgruppen