

# ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

## — BLATT 9 —

Arthur Bartels, Roman Sauer

10. Dezember 2008

**Übung 1.** Wir bezeichnen die  $n$ -fache zusammenhängende Summe  $M\#\dots\#M$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  mit  $nM$ .

- (a) Seien  $n, m \geq 1$ . Zeigen Sie, dass  $nT^2$  und  $m\mathbb{R}P^2$  nicht homöomorph sind.
- (b)  $T^2\#\mathbb{R}P^2$  ist homöomorph zu einer Mannigfaltigkeit des Typs  $nT^2$  oder  $m\mathbb{R}P^2$ . Entscheiden Sie, welche es ist.

**Übung 2.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow S^n$  existiert, so dass  $H_n(f) : H_n(M) \rightarrow H_n(S^n)$  surjektiv ist.

**Übung 3.** Auf der singulären Kettengruppe  $C_n(X; \mathbb{R})$  eines Raums  $X$  definieren wir eine Norm vermöge

$$\left| \sum_{\sigma \in S_n(X)} a_\sigma \sigma \right| := \sum_{\sigma \in S_n(X)} |a_\sigma|.$$

Für eine Homologieklassse  $z \in H_n(X; \mathbb{R})$  definiere man

$$\|z\| := \inf\{|x|; [x] = z, x \in \ker(d : C_n(X; \mathbb{R}) \rightarrow C_{n-1}(X; \mathbb{R}))\}.$$

Zeigen Sie, dass  $\|[S^1]\| = 0$  für die Fundamentalklasse  $[S^1]$  von  $S^1$ .

**Übung 4.** Sei  $X$  ein topologischer Raum, und seien  $U, V \subset X$  zwei offene Teilmengen. Zeigen Sie, dass die Randabbildung in der kohomologischen Mayer-Vietoris Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^n(X, U \cup V) \rightarrow H^n(X, U) \oplus H^n(X, V) \rightarrow H^n(X, U \cap V) \\ \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, U \cup V) \dots \end{aligned}$$

$H^*(X)$ -linear ist.

Zur Erinnerung: Ist  $A \subset X$  ein Teilraum, so wird  $H^*(X, A)$  durch das Cup-Produkt

$$H^*(X, A) \otimes H^*(X) \xrightarrow{\cup} H^*(X, A)$$

zu einem  $H^*(X)$ -Modul.