I Pseudo-Differentialoperatoren auf $\mathbb{R}^n$

Def. (1.1) Eine glatte Funktion $p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{C}^{q_1 \times q_2}$) heißt Symbol der Ordnung $m \in \mathbb{R}$, falls für alle α, α' eine Konstante $C_{\alpha,\alpha'}$ existiert mit $|D_x^\alpha D_\xi^{\alpha'} p(x,\xi)| \le C_{\alpha,\alpha'} \cdot (1+|\xi|)^{m-|\alpha'|}$ $\forall x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

$\left(D_x^\alpha := \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n\right)$

$S^m(\mathbb{R}^n) :=$ Menge der Symbole der Ordnung m $\qquad \left(S^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_m S^m(\mathbb{R}^n)\right)$

__Wiederholung:__ Ein Differentialoperator der Ordnung m auf $\mathbb{R}^n$ hat die Form

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} A^\alpha(x) D_x^\alpha \quad \text{mit } A^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

$p(x,\xi) := \sum_{|\alpha| \le m} A^\alpha(x)\xi^\alpha$ heißt totales Symbol von P.

Gilt $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$? Ja, falls alle $D_x^{\alpha'} A^\alpha$ beschränkt sind.

Sei $u \in \mathcal{S} := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, k \ \exists C_{\alpha,k} : |D_x^\alpha u(x)| \le C_{\alpha,k}(1+|x|)^{-k}\}$. "Schwartz-Raum"

Fourier-Transformation: $\hat{u}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int u(x) e^{-ix\xi}\, dx \ \in \mathcal{S}$

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{u}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{u}(\xi) \Big(\sum_{|\alpha| \le m} A^\alpha(x) D_x^\alpha e^{ix\xi}\Big)\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{u}(\xi)\, p(x,\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k} e^{ix\xi} = \xi_k e^{ix\xi}$$

__Def.:__ $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$ definiert einen Operator $P: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ mit $Pu(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{u}(\xi) p(x,\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$.

(zu zeigen: $Pu \in \mathcal{S}$ → Ü.2))

P heißt Pseudo-Differentialoperator der Ordnung m auf $\mathbb{R}^n$.

$\Psi DO_m(\mathbb{R}^n) :=$ Menge dieser PDO

Eine lineare Abbildung $\tau: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ heißt m-glättend, falls sie sich für alle $s \in \mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung $\tau: H^s \to H^{s+m}$ fortsetzen lässt.

(Zur Erinnerung: H^s ist die Vervollständigung von $\mathcal{S}$ bzgl. $\|u\|_s := \sqrt{\int (1+|\xi|)^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi}$.)
"Sobolev-Raum"

Prop.: Falls $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$ kompakten x-Träger hat, ist P $(-m)$-glättend.
(3.2) zu zeigen: $P: H^s \to H^{s-m}$
Beweisidee: $|\langle Pu, v\rangle| \leq C \cdot \|u\|_s \cdot \|v\|_{m-s} \Rightarrow \langle Pu, -\rangle \in (H^{m-s})^* \Rightarrow Pu \in H^{s-m}$

Def.: $P, P' \in \Psi DO_m(\mathbb{R}^n)$ heißen äquivalent, falls $P - P'$ ∞-glättend (d.h. k-glättend $\forall k$) ist.

Prop.: Falls $P \in \Psi DO_m(\mathbb{R}^n)$ ∞-glättend ist, gilt $Pu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: $Pu \in H^{n/2+k+1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^n) \quad \forall k$
Sobolevscher Einbettungssatz ($H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^n)$ falls $s > \frac{n}{2} + k$)

Def.: Seien $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$ und $p_j \in S^{m_j}(\mathbb{R}^n)$ $(j \in \mathbb{N})$.
(3.3) Wir schreiben $p \sim \sum_{j=1}^{\infty} p_j$ (asymptotische Summe), falls gilt:
$\forall m \; \exists K \; \forall k \geq K: \; p - \sum_{j=1}^{k} p_j \in S^m(\mathbb{R}^n)$.

Prop.: Seien $p_j \in S^{m_j}(\mathbb{R}^n)$ $(j \in \mathbb{N})$ mit $m_j \searrow -\infty$.
(3.4) Dann existiert $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$ für ein m, so dass $p \sim \sum_{j=1}^{\infty} p_j$.
Der zugehörige Pseudo-Differentialoperator ist eindeutig bestimmt bis auf Äquivalenz.

Def.: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt.
$$\Psi DO_{K,m}(\mathbb{R}^n) := \left\{ P \in \Psi DO_m(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \begin{array}{l} supp(Pu) \subseteq K \\ supp(u) \cap K = \emptyset \Rightarrow Pu = 0 \end{array} \quad \forall u \right\}$$

Prop.: Seien $P \in \Psi DO_{K,l}(\mathbb{R}^n)$, $Q \in \Psi DO_{K,m}(\mathbb{R}^n)$ mit Symbolen p, q.
(3.10.) Dann gilt $P \circ Q \in \Psi DO_{K,l+m}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{Symbol}(P \circ Q) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha p)(D_x^\alpha q)$

... $\phi: U \to V$ ein Diffeomorphismus ($U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen).

Sei $K \subseteq U$ kompakt. Wir erhalten eine Abbildung

$$\phi_*: \Psi DO_{K,m}(\mathbb{R}^n) \to \Psi DO_{\phi(K),m}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit } \phi_*(P)(u) := P(u \circ \phi) \circ \phi^{-1}.$$

Es gilt $\text{Symbol}(\phi_* P) \equiv p\left(\tilde{x}(x), \left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)^t \xi\right)$ mod $S^{m-1}(\mathbb{R}^n)$.

$(\tilde{x} = \phi^{-1}(x))$

m.: Somit transformiert sich das Symbol modulo Symbole niedrigerer Ordnung wie eine Funktion auf dem Kotangentialbündel von $\mathbb{R}^n$.

f.: Sei $P \in \Psi DO_m(\mathbb{R}^n)$ mit Symbol $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$.

13) $\sigma(P) := [p] \in S^m(\mathbb{R}^n)/S^m(\mathbb{R}^{n-1})$ heißt Hauptsymbol.

II Pseudo-Differentialoperatoren $P: \Gamma(E) \to \Gamma(F)$

X kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n

E, F, G glatte, komplexe Vektorbündel über X .

Def: Eine lineare Abbildung $P: \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ heißt ∞-glättend, falls sie eine stetige Fortsetzung $P: H^s(E) \to H^{s+m}(F)$ für alle $s, m \in \mathbb{R}$ besitzt.

Def.: (3.15) Eine lineare Abbildung $P: \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ heißt Pseudo-Differentialoperator der Ordnung m, falls modulo ∞-glättender Operatoren $P = \sum P_a$ (endl. Summe) gilt, wobei jedes P_a in einem System lokaler Koordinaten $x_a: U_a \to \mathbb{R}^n$ und glatter Bündeltrivialisierungen als Pseudo-Differentialoperator der Ordnung m mit kompaktem Träger geschrieben werden kann.

$\Psi DO_m(E, F) :=$ Menge dieser Pseudo-Differentialoperatoren.

Bem.: Jeder Differentialoperator $P: \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ der Ordnung m liegt in $\Psi DO_m(E, F)$.

Theorem: (3.17) Seien $P \in \Psi DO_m(E, F)$, $Q \in \Psi DO_l(F, G)$.

a) P lässt sich für alle $s \in \mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung $P: H^s(E) \to H^{s-m}(F)$ fortsetzen.

b) Sei $U \subseteq X$ offen. $u \in H^s(E), u|_U \in C^\infty \Rightarrow Pu|_U \in C^\infty$.

c) $Q \circ P \in \Psi DO_{m+l}(E, G)$.

d) $P^* \in \Psi DO_m(F^*, E^*)$ ($P^*: \Gamma(F^*) \to \Gamma(E^*)$ ist definiert über $\int_X \langle Pu, v \rangle \, dvol = \int_X \langle u, P^* v \rangle \, dvol$,

e) Ein Diffeomorphismus $\phi: X \to X$ induziert

$$\phi_*: \Psi DO_m(\phi^* E, \phi^* F) \to \Psi DO_m(E, F) \text{ mit } \phi^*[(\phi_* P) u] = P(\phi^* u)$$

$\pi: T^*X \to X$

$\pi^*E, \pi^*F, \quad Hom(\pi^*E, \pi^*F)$ Vektorbündel über T^*X

$p \in \Gamma(Hom(\pi^*E, \pi^*F))$ hat in einem System lokaler Koordinaten $(x = x_1, \dots, x_n)$ und glatten Bündeltrivialisierungen

die Form $p(x, \xi) \in Hom(\mathbb{C}^{k_1}, \mathbb{C}^{k_2}) = \mathbb{C}^{k_2 \times k_1}$ mit $\xi_i = dx_i$ (glatte Funktion).

<u>Def.:</u> (3.18) $p \in \Gamma(Hom(\pi^*E, \pi^*F))$ heißt Symbol der Ordnung m, wenn es lokal ein Symbol der Ordnung m auf $\mathbb{R}^n$ ist.

$S^m(E,F) :=$ Menge der Symbole der Ordnung m

<u>Prop.:</u> (3.19) a) Jedes $P \in \Psi DO_m(E,F)$ besitzt ein zugehöriges Hauptsymbol $\sigma(P) \in S^m(E,F) / S^{m-1}(E,F)$.

b) Zu jedem $p \in S^m(E,F)$ lässt sich ein $P \in \Psi DO_m(E,F)$ mit $\sigma(P) = [p]$ konstruieren.

III Elliptische Pseudo-Differentialoperatoren

Def.: $P \in \Psi DO_m(\mathbb{R}^n)$ mit Symbol p heißt elliptisch, falls ein $c>0$ existiert, so
(4.1)
dass $p(x,\xi)$ für alle $|\xi| \geq c$ invertierbar ist und $|p(x,\xi)^{-1}| \leq c(1+|\xi|)^{-m}$ gilt.

Prop.: Sei $P \in \Psi DO_m(\mathbb{R}^n)$ elliptisch. Dann existiert $Q \in \Psi DO_{-m}(\mathbb{R}^n)$, so dass
(4.3)
$PQ - Id$ und $QP - Id$ ∞-glättend sind. Q ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt und heißt Parametrix für P.

Beweisidee: Sei $\varkappa : \mathbb{R} \to [0,1]$ glatt mit $\varkappa(t) = 0$ für $t \leq c$ und $\varkappa(t) = 1$ für $t \geq 2c$

$$q_0(x,\xi) := \varkappa(|\xi|) \cdot p(x,\xi)^{-1} \in S^{-m}(\mathbb{R}^n)$$

$$q_0 p - 1 = p q_0 - 1 = 0 \quad \text{für } |\xi| \geq 2c$$

$$\text{Symbol}(QP) = \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha q)(D_x^\alpha p)$$

$$\Rightarrow \text{Symbol}(Q_0 P - 1) \in S^{m-1}(\mathbb{R}^n)$$

Konstruiere rekursiv $q_k \in S^{-m-k}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{Symbol}\left(\left(\sum_{l=0}^{k} Q_l\right)P - 1\right) \in S^{m-k-1}(\mathbb{R}^n)$.

Q mit $q \sim \sum_{k=0}^{\infty} q_k$ hat die gewünschte Eigenschaft.

$\longrightarrow$

Def.: $P \in \Psi DO_m(E,F)$ heißt elliptisch, falls $\sigma(P) \in S^m(E,F)/S^{m-1}(E,F)$ einen Repräsentanten p
(4.7)
besitzt, der außerhalb einer kompakten Teilmenge von T^*X punktweise invertierbar ist mit $|p(\xi)^{-1}| \leq C(1+|\xi|)^{-m}$ für eine Konstante C und eine Riemannsche Metrik auf X.

Theorem: Sei $P \in \Psi DO_m(E,F)$ elliptisch. Dann existiert $Q \in \Psi DO_{-m}(F,E)$, so dass
(4.6, 4.7)
$PQ - Id$ und $QP - Id$ ∞-glättend sind. Q ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt und heißt Parametrix für P.

* **Prop.:** (4.5) Sei $P \in \Psi DO_-(\mathbb{R}^n)$ elliptisch. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Für $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ gilt: $Pu|_U \in C^\infty \Rightarrow u|_U \in C^\infty$

Korollar: Sei $P \in \Psi DO_m(\mathbb{R}^n)$ elliptisch mit $m > 0$.

Seien $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $Pu = \lambda u$. Dann gilt $u \in C^\infty$.

Beweis: $P - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ ist elliptisch. $(P-\lambda)(u) = 0 \in C^\infty \overset{\text{Prop.}}{\Rightarrow} u \in C^\infty$