I Fredholm-Operatoren

H_1, H_2 Hilbert-Räume

<u>Def</u>: $T: H_1 \longrightarrow H_2$ stetiger linearer Operator.
Dann heißt T <u>Fredholm</u>, wenn

- $\operatorname{im} T$ abgeschlossen in H_2
- $\ker T$, $\operatorname{coker} T$ endlich-dimensional

<u>Def</u>: $S: H_1 \longrightarrow H_2$ stetiger linearer Operator. Dann heißt S <u>kompakt</u>, wenn S jede beschränkte Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H_1 auf eine Folge $(Su_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H_2 abbildet, die eine konvergente Teilfolge hat.

<u>Beispiele</u> für kompakte Operatoren

(i) Die Einbettungen

$$L^2_s(E) \hookrightarrow L^2_{s'}(E)$$

für $s > s'$ (Sobolevscher Einbettungssatz)

(ii) Unendlich glättende Operatoren

Ein Kriterium für die Fredholm-Eigenschaft:

<u>Lemma</u>
$T: H_1 \longrightarrow H_2$ $\quad Q: H_2 \longrightarrow H_1$
seien beschränkte lineare Operatoren.
Es gebe kompakte Operatoren
$S_1: H_1 \longrightarrow H_2$ $\quad S_2: H_2 \longrightarrow H_1$
mit

$$QT = \mathrm{id} - S_1$$
$$TQ = \mathrm{id} - S_2$$

Dann sind T und Q Fredholm.

Beweis:

Wir zeigen:

(i) $\ker T$ ist endlich-dimensional:

$$S_1\big|_{\ker T} = id$$

S_1 ist kompakt $\Rightarrow$ jede beschränkte Folge in $\ker T$ hat konvergente Teilfolge

$\Rightarrow$ $\ker T$ ist endlich-dimensional.

(ii) $\operatorname{koker} T$ ist endlich-dimensional:

Für die adjungierten T^*, Q^* gilt:

$$Q^* T^* = id - S_2^*$$

S_2^* ist kompakt (Satz von Schauder)

$$\Rightarrow \dim \operatorname{koker} T = \dim \ker T^* < \infty$$

(iii) $\operatorname{im} T$ ist abgeschlossen:

Schränke T auf $(\ker T)^\perp$ ein

$\Rightarrow$ können annehmen, T sei injektiv

Sei $v_k = T u_k$ $k = 1, 2, \ldots$

Folge in H_2 mit $v_k \longrightarrow v$.

Wollen zeigen: es ex. $u \in H_1$ mit $Tu = v$.

- $(u_k)_{k \geq 1}$ ist beschränkt:

Andernfalls nimm an, daß

$$\|u_k\| \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow T \frac{u_k}{\|u_k\|} = \frac{v_k}{\|u_k\|} \longrightarrow 0$$

S_1 kompakt $\Rightarrow$ können annehmen, $S_1 \frac{u_k}{\|u_k\|}$ konvergiere

Da $\left(T \frac{u_k}{\|u_k\|}\right)$ konvergiert, konvergiert auch $\left(\frac{u_k}{\|u_k\|}\right) = \left((QT + S_1)\frac{u_k}{\|u_k\|}\right)$,

etwa gegen $w \in H_1$

Stetigkeit von $T \Rightarrow Tw = 0$

Da T injektiv ist, ist $w = 0$.
Das ist unmöglich. Also ist $(u_k)_{k\geq 1}$ beschränkt.
Wir können annehmen, $(S_1 u_k)_{k\geq 1}$ konvergiert.
Mit $QT + S_1 = id$ folgt, daß $(u_k)_{k\geq 1}$ konvergiert. $\square$

Folgerungen für elliptische Operatoren:

<u>Theorem</u>

$P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ sei elliptischer Operator der Ordnung $m \geq 0$ über einer kompakten Mannigfaltigkeit X

(i) Sei $U \subset X$ offene Menge $u \in L^2_s(E)$.
Dann gilt:
$$Pu|_U \in C^\infty \Rightarrow u|_U \in C^\infty$$

<u>Beweis</u> Siehe letztes Jahr

(ii) Für jedes s ist der Abschluß
$$P : L^2_s(E) \to L^2_{s-m}(F)$$
ein Fredholm-Operator.
Der Index des Abschlußes ist unabhängig von s.

Beweis Der elliptische Operator P hat eine Parametrix. Also können wir das oben bewiesene Lemma anwenden. Da Kern und Kokern des Abschlußes von P aus glatten Funktionen bestehen, hängt der Index nicht von s ab.

(iii) Für jedes s existiert eine Konstante C_s, so daß

$$\|u\|_s \leq C_s \left(\|u\|_{s-m} + \|Pu\|_{s-m} \right)$$

für alle $u \in L^2_s(E)$.

Beweis

Sei $Q \in \Psi DO_{-m}(F, E)$ eine Parametrix für P.
Es existiert dann ein unendlich glättender Operator S, so daß

$$u = QPu + Su$$

$$\Longrightarrow \|u\|_s = \|QPu\|_s + \|Su\|_s$$
$$\leq C_s \left(\|Pu\|_{s-m} + \|u\|_{s-m} \right)$$

II topologische Invarianz des Index

$L(H_1, H_2)$ sei der normierte Raum aller linearen, beschränkten Abbildungen.

$\mathcal{F} \subset L(H_1, H_2)$ Teilmenge der Fredholm-Operatoren

$$\mathrm{ind} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$P \longmapsto \dim \ker P - \dim \operatorname{coker} P$$

Theorem

Die Abbildung ind ist konstant auf zusammenhängenden Komponenten von $\mathcal{F}$.
Die induzierte Abbildung

$$\mathrm{ind} : \pi_0(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist bijektiv.

Lemma

$L^* \subset L(H_1, H_2)$ Isomorphismen

L^* ist eine offene Teilmenge

Lemma

$T_0 : H_1 \longrightarrow H_2$ Fredholm

$V \subset H_1$ Unterraum, so daß

(i) $V \cap \ker T = \{0\}$

(ii) $V \subset H_1$ abgeschlossen und von endlicher Kodimension

Dann existiert eine offene Menge $\mathcal{U} \subset L$, $T_0 \in \mathcal{U}$, so daß für alle $T \in \mathcal{U}$ gilt:

a) $\ker T \cap V = \{0\}$

b) $TV \subset H$ ist abgeschlossen

c) $W := (T_0 V)^\perp$ projiziert isomorph auf H_2 / TV

Beweis

- $\tilde{T} : W \oplus V \longrightarrow H_2$
  $(w, v) \longmapsto w + Tv$
  ist ein Isomorphismus ('Open mapping theorem')

- $\alpha : L(H_1, H_2) \longrightarrow L(V \oplus W, H_2)$
  $T \longmapsto \tilde{T}$
  ist stetig bzgl. der Norm-Topologie

- $\tilde{T}_0$ hat eine offene Umgebung $\tilde{\mathcal{U}}_0$ in $L^*(V \oplus W, H_2)$

- Setze $\mathcal{U} := \alpha^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$ $\square$

Korollar

$\mathcal{F}$ ist offen in $L(H_1, H_2)$

Beweis

Wähle im oben bewiesenen Lemma

$V = (\ker T_0)^\perp$

$\square$

Korollar

ind ist konstant auf Zusammenh. Komponenten.

Beweis

- $T_0 \in \mathcal{F}$ $\quad V := (\ker T_0)^\perp$

  $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ offene Umgebung von T_0 wie im oben bewiesenen Lemma

- Zeige: $T \in \mathcal{U} \implies \operatorname{ind} T = \operatorname{ind} T_0$

- Es existiert Zerlegung

  $H_1 = V \oplus Z \oplus \ker T$

  mit $Z = (V \oplus \ker T)^\perp$

- $T : V \oplus Z \to TV \oplus TZ$

  ist stetige Bijektion

  open mapping thm.

  $\implies T : V \oplus Z \to TV \oplus TZ$

$\rightsquigarrow$ Haben Zerlegungen

$\ker T \oplus Z = \ker T_0$

$\operatorname{coker} T \oplus TZ = \operatorname{coker} T_0$

Mit $\dim Z = \dim TZ$ folgt nun

$\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} T_0$

$\square$

Lemma

$T_0, T_1 \in \mathcal{F}$ $\quad$ $\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind} T_1$

$\Longrightarrow$ T_0, T_1 liegen in derselben zusammenhängenden Komponente von $\mathcal{F}$

Beweis

- $\operatorname{ind} T^* = -\operatorname{ind} T$

$\Longrightarrow$ OE $\operatorname{ind} T_0$, $\operatorname{ind} T_1 \geq 0$

- T_0 ist homotop zu einem surjektiven Operator

Beweis

Wähle Surjektion

$$A : \ker T_0 \to \operatorname{coker} T_0$$

und setze

$$T_0^t := T_0 + tA \quad \text{für } t \in [0,1]$$

- Also OE T_0, T_1 surjektiv

Ex. Isomorphismus

$$C : H_1 \to H_2$$

so daß

$$T_0 = T_1 C$$

Beweis

$$H_1 = \ker T_0 \oplus (\ker T_0)^\perp$$

Setze $\quad C' : (\ker T_0)^\perp \to (\ker T_1)^\perp$

$$C' := T_1^{-1} \circ T_0$$

Wähle einen Isomorphismus

$$C'' : \ker T_0 \to \ker T_1$$

und setze $\quad C := C' \oplus C''$

Nach Konstruktion

$$T_0 = T_1 C$$

Mit Spektraltheorie kann man zeigen, daß $L^*(H_1, H_2)$ zusammenhängend ist.
Also ist C homotop zur Identität.
Daraus folgt die Behauptung $\square$

Insgesamt haben wir unser ~~Satz~~ Theorem bewiesen.

Als Anwendung auf elliptische Operatoren ergibt sich: der Index eines solchen Operators hängt nur von der regulären Homotopieklasse des Hauptsymbols ab.