

ÜBUNGEN ZU CHARAKTERISTISCHEN KLASSEN

— LÖSUNGEN ZU BLATT 4 —

Roman Sauer , Malte Röer

22. Mai 2009

Übung 1. Wir wollen zeigen: $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit. Dazu konstruieren wir einen glatten Atlas.

- (i) Für $X_0 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ist die Teilmenge $U_{X_0} := \{Y \in G_n(\mathbb{R}^{n+k}) : pr_{X_0}(Y) = X_0\}$ offen in $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. (Hierbei bezeichne pr_{X_0} die Projektion auf X_0).

Beweis: Sei

$$\pi : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

die Projektion. U_{X_0} ist genau dann offen in $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, wenn $\pi^{-1}(U_{X_0})$ offen ist in $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Sei $V \in \pi^{-1}(U_{X_0})$. $V =: \{v_1, \dots, v_n\}$ definiert eine Abbildung

$$g_V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}; v_i \mapsto v_i$$

so dass $pr_{X_0} \circ g_V$ ein Vektorraumisomorphismus ist. Es folgt mit der Stetigkeit von det :

$$det(pr_{X_0} \circ g_V) \neq 0.$$

Offensichtlich gilt nun auch

$$det(pr_{X_0} \circ g_{\tilde{V}}) \neq 0$$

für alle \tilde{V} aus einer geeigneten offenen Umgebung von V . Also gibt es eine offene Umgebung von V , die ganz in $\pi^{-1}(U_{X_0})$ enthalten ist.

- (ii) Es existiert ein Homöomorphismus

$$\Theta_{X_0} : U_{X_0} \rightarrow Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

Beweis: Wähle Koordinatenisomorphismen

$$b : \mathbb{R}^n \rightarrow X_0; b' : \mathbb{R}^k \rightarrow X_0^\perp.$$

Für ein $Y \in U_{X_0}$ existiert nun eine lineare Abbildung

$$s_Y : X_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n+k},$$

so dass

$$pr_{X_0} \circ s_Y = id_{X_0}; pr_Y \circ s_Y \circ pr_{X_0} \circ i_Y = id_Y,$$

wobei

$$i_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}; pr_Y : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow Y$$

Inklusion und Projektion seien. Es sei angemerkt, dass die Identität

$$s_Y = i_Y \circ (pr_{X_0} : Y \rightarrow X_0)^{-1}$$

gilt.

Behauptung: Die Abbildung

$$H_{X_0} : U_{X_0} \rightarrow Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+k}); Y \mapsto s_Y \circ b$$

ist stetig.

Beweis: Es reicht zu zeigen:

$$H_{X_0} \circ \pi : \pi^{-1}(U_{X_0}) \rightarrow Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+k})$$

ist stetig. Sei also $V = \{v_1, \dots, v_n\} \in \pi^{-1}(U_{X_0})$. Sei $Y := \pi(V)$. Es gilt:

$$b^{-1} \circ pr_{X_0}(v_i) = \sum A_{ij} \cdot e_j,$$

wobei (e_i) die Standard-Basis des \mathbb{R}^n sei und die A_{ij} Einträge einer geeigneten Matrix A . A hängt stetig (und sogar differenzierbar) von V ab. Nach Voraussetzung ist A invertierbar. Setze $C := A^{-1}$. Es folgt:

$$H_{X_0} \circ \pi(V) = s_Y \circ b = (e_j \mapsto \sum C_{ji} \cdot v_i)$$

Nun hängt $C = A^{-1}$ offensichtlich stetig (und sogar differenzierbar) von V ab.

Definiere:

$$\Theta_{X_0} : U_{X_0} \rightarrow Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

durch

$$Y \mapsto b'^{-1} \circ pr_{X_0^\perp} \circ H_{X_0}(Y)$$

Dies ist eine stetige Abbildung. Eine Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\Theta_{X_0}^{-1} : Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \rightarrow U_{X_0}; A \mapsto \{b(v) + b'(Av) : v \in \mathbb{R}^n\} \in G_n(\mathbb{R}^{n+k}).$$

Der Nachweis, dass hier tatsächlich eine inverse Abbildung vorliegt, ist leicht. Weiter existiert ein stetiger (sogar differenzierbarer) Lift von $\Theta_{X_0}^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc} & & V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \\ & \nearrow^{I_{X_0}} & \downarrow \pi \\ \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) & \xrightarrow{\Theta_{X_0}^{-1}} & U_{X_0} \end{array}$$

Also ist $\Theta_{X_0}^{-1}$ stetig.

- (iii) Da die Mengen der Form U_X für $X \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ eine offene Überdeckung bilden, haben wir einen Atlas gefunden. Es bleibt zu zeigen, dass die Kartenwechsel differenzierbar sind.

Seien $X_0, X_1 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Die Kartenwechselabbildungen

$$\Theta_{X_1} \circ \Theta_{X_0}^{-1} : \Theta_{X_0}(U_{X_0} \cap U_{X_1}) \rightarrow \Theta_{X_1}(U_{X_0} \cap U_{X_1})$$

sind gegeben durch

$$Y \mapsto b' \circ pr_{X_1^\perp} \circ H_{X_1} \circ \Theta_{X_0}^{-1} = b' \circ pr_{X_1^\perp} \circ H_{X_1} \circ \pi \circ I_{X_0}.$$

Da $H_{X_0} \circ \pi$ und I_{X_0} differenzierbare Abbildungen sind (wie oben gezeigt), folgt die Behauptung. (b bzw. b' bezeichnen hier sowohl die Koordinatenabbildung für X_0 bzw. X_0^\perp , als auch für X_1 bzw. X_1^\perp , je nachdem wie es passt.)

- (iv) $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ist ein Hausdorff-Raum

Beweis: Seien $V, W \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ mit $V \neq W$ gegeben. Sei $v \in V$, so dass $v \notin W$. Definiere

$$f : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \mathbb{R}; X \mapsto \|pr_X(v)\|$$

Offensichtlich ist die Abbildung $f \circ \pi$ stetig, also ist auch f stetig. Es gilt $f(W) \neq f(V)$. Das zeigt die Behauptung.

- (v) Die Topologie auf $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ hat eine abzählbare Basis.

Dies ist fast klar, da man $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ durch endlich viele offene Mengen U_X überdecken kann, die jeweils eine abzählbare Basis haben.

Übung 2. Betrachte folgende Abbildung:

$$E(\gamma^n)|_{U_X} \rightarrow U_X \times \mathbb{R}^n; (Y, y) \mapsto (Y, b^{-1} \circ pr_{X_0}(y)).$$

für $X \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Eine stetige Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$U_X \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\gamma^n)|_{U_X}; (Y, v) \mapsto (Y, s_Y \circ b(v))$$

Übung 3. Wir definieren zunächst eine Abbildung

$$TV_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow Hom(\gamma^n(E), \gamma^{n\perp}(E))$$

wie folgt. Sei $v \in T_X V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ repräsentiert durch eine glatte Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V_n(\mathbb{R}^{n+k}); t \mapsto (v_1(t), \dots, v_n(t))$ mit $c(0) = X$. Definiere nun ein Element in $Hom(\gamma^n, \gamma^{n\perp})_{\pi(X)} = Hom(\pi(X), \pi(X)^\perp)$ bezüglich der Basis $X = c(0) = (v_1(0), \dots, v_n(0))$ durch

$$v_i(0) \mapsto pr_{\pi(X)^\perp} \frac{d}{dt} v_i(t)|_{t=0}$$

Diese Definition ist offenbar unabhängig von der Wahl des Repräsentanten für v . Wir erhalten durch diese Vorschrift eine Abbildung

$$F : TV_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow Hom(\gamma^n(E), \gamma^{n\perp}(E))$$

Sei nun $\tilde{v} \in T_{\pi(X)} G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ repräsentiert durch eine glatte Kurve $\tilde{c} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Die Kurve \tilde{c} hat einen glatten Lift c nach $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Behauptung: $F(c)$ hängt nur von \tilde{c} ab, nicht von der Wahl des Lifts.

Beweis: Sei c' ein weiterer Lift von \tilde{c} . Sei $c(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$ und $c'(t) = (v'_1(t), \dots, v'_n(t))$. Dann gibt es eine glatt von t abhängende lineare Abbildung $A(t) \in M(n+k, \mathbb{R})$, so dass

$$v'_i(t) = A(t)v_i(t)$$

Wegen $(\frac{d}{dt} A(t)|_{t=0})v_i(0) \in \pi(X)$ gilt:

$$pr_{\pi(X)^\perp} \left(\frac{d}{dt} (A(t)v_i(t))|_{t=0} \right) = pr_{\pi(X)^\perp} (A(0) \frac{d}{dt} v_i(t)|_{t=0})$$

Es folgt die Behauptung.

Wir erhalten also eine Abbildung

$$f : TG_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow Hom(\gamma^n(E), \gamma^n(E)^\perp)$$

Offenbar kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 TG_n(\mathbb{R}^{n+k}) & \xrightarrow{f} & \text{Hom}(\gamma^n(E), \gamma^{n\perp}(E)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G_n(\mathbb{R}^{n+k}) & \xrightarrow{Id} & G_n(\mathbb{R}^{n+k})
 \end{array}$$

Wir müssen noch nachweisen, dass f stetig ist und linear auf den Fasern. Dies sind lokale Fragen. In lokalen Koordinaten sieht f folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 U_X \times \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) &= TG_n(\mathbb{R}^{n+k})|_{U_X} \\
 &\rightarrow \text{Hom}(\gamma^n(E), \gamma^{n\perp}(E))|_{U_X} = U_X \times \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \\
 (Y, A) &\mapsto (Y, A)
 \end{aligned}$$

Dies kann man sich leicht mit Hilfe der Koordinatenhomöomorphismen aus **Übung 1,2** überlegen. Hier sieht man, dass f stetig ist und ein linearer Isomorphismus auf der Faser. Da f die Identität überdeckt, ist f ein Bündelisomorphismus.