

# Seminar zur geometrischen Gruppentheorie

PD Dr. M. Joachim/PD Dr. R. Sauer

SS 2010

---

Die Definition einer Gruppe ist aus dem Studium von Symmetrien geometrischer Objekte hervorgegangen – umgekehrt können wir jede Gruppe als Gruppe von Isometrien geeigneter metrischer Räume interpretieren.

In diesem Seminar werden wir Grundbegriffe und Konstruktionen der Gruppentheorie (freie Gruppen, Präsentationen, Wortproblem) einführen und Gruppen durch ihre Wirkung auf geometrischen Objekten studieren.

Zum Beispiel liefert die geometrische Charakterisierung freier Gruppen durch freie Operationen auf Bäumen einen eleganten Zugang zu der naheliegenden Frage, ob Untergruppen von freien Gruppen frei sind; ein Problem, das mit rein algebraischen Methoden nicht einfach zu lösen ist.

Zum Abschluss werden wir uns mit Grigorchuk-Gruppen beschäftigen; dies ist eine Klasse von Gruppen mit vielen Querverbindungen zur theoretischen Informatik und Logik.

## Themen

**Vortrag 1 (Freie Gruppen und Präsentationen).** Definition und universelle Eigenschaft freier Gruppen, Präsentationen von Gruppen, Ping-Pong Lemma, Wortproblem [2, S. 440/441; 3, Kapitel II.A und II.B]

**Vortrag 2 (Konstruktionen und Beispiele von Gruppen).** Existenz überabzählbar vieler endlich erzeugter Gruppen, semidirekte Produkte, Kranzprodukte [3, S. 47,68-69,214]

**Vortrag 3 (Topologische Gruppenoperationen).** Grundbegriffe aus der mengentheoretischen Topologie wie z.B. Quotiententopologie, eigentliche und isometrische Operationen, Wortmetrik, Cayleygraph [2, S. 131f; 3, Kapitel IV.A; 4, Kapitel 1 und 3].

**Vortrag 4 (Gruppenoperationen auf Bäumen I).** Grundbegriffe über Bäume und Operationen auf Bäumen, maximale Unterbäume von Graphen,

Kontraktionen von Unterbäumen [6, Kapitel I.2]

**Vortrag 5 (Gruppenoperationen auf Bäumen II).** Charakterisierung freier Gruppen durch Operationen auf Bäumen, Satz von Schreier, Definition amalgamierter Produkte [6, Kapitel I.1 und I.3]

**Vortrag 6 (Gruppenoperationen auf Bäumen III).** Charakterisierung amalgamierter Produkte durch Operationen auf Graphen, Anwendungen [6, Kapitel I.4]

**Vortrag 6 (Amalgamierte Produkte und Fixpunkte I).** Eigenschaft FA, Fixpunkte von Automorphismen von Bäumen [6, Kapitel I.6]

**Vortrag 7 (Amalgamierte Produkte und Fixpunkte II).** Operationen nilpotenter Gruppen auf Bäumen, das Beispiel  $SL(3, \mathbb{Z})$  [6, Kapitel I.6]

**Vortrag 8 (Quasi-Isometrie von Gruppen).** Definition von Quasi-Isometrie, Beispiele, Satz von Schwarz-Milnor [2, S. 138f; 3, Kapitel IV.B]

**Vortrag 9 (Enden von Gruppen).** Enden von metrischen Räumen und endlich erzeugten Gruppen, Quasi-Isometrie-Invarianz von Enden [2, S. 144f]

**Vortrag 10 (Wachstum von Gruppen).** Wachstumstypen, Quasi-Isometrie-Invarianz der Wachstumstypen, Beispiele von Wachstumsfunktionen [3, Kapitel VI, VII]

**Vortrag 11 (Amenable Gruppen).** Definition von Amenabilität, Følner-Mengen, warum sind freie Gruppen von Rang  $\geq 2$  nicht amenabel?, Amenabilität und subexponentielles Wachstum, Banach-Tarski-Paradoxon [3, S. 205/206; 5, Kapitel 2]

**Vortrag 12 (Grigorchuk-Gruppen I).** Grundbegriffe von Automorphismen von unendlichen Bäumen mit Wurzel, Addiermaschine [3, Kapitel VIII.A]

**Vortrag 13 (Grigorchuk-Gruppen II).** Definition der ersten Grigorchuk-Gruppe, Burnside-Problem, Nicht-Linearität der Grigorchuk-Gruppe [3, Kapitel VIII.B]

**Vortrag 14 (Grigorchuk-Gruppen III).** Subexponentielles Wachstum der Grigorchuk-Gruppe [3, Kapitel VIII.F]

## Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche nach dem Vortrag abgegeben werden.
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags für die anderen Teilnehmer enthält.
- Für Studenten des Studiengangs Zwei-Fach-Bachelor wird der Vortrag benotet; für alle anderen Teilnehmer wird der Schein nicht benotet.

## Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Versuchen Sie, Definitionen geometrisch zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.

- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem  $\text{\LaTeX}$  besser kennenzulernen. Wir werden für das Handout eine  $\text{\LaTeX}$ -Vorlage zur Verfügung stellen.

## Literatur

- [1] Mark A. Armstrong, *Groups and symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1988.
- [2] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, 1999.
- [3] Pierre de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 2000.
- [4] Klaus Jänich, *Topologie*, 8th ed., Springer-Verlag, 2005.
- [5] Alexander Lubotzky, *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Progress in Mathematics, vol. 125, Birkhäuser Verlag, 1994.
- [6] Jean-Pierre Serre, *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2003.