Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II Sommersemester 2009
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 1
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 20.04.2009, 16:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} -5 & -10 & 2 \\ 4 & 9 & -2 \\ 8 & 12 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ existiert, sodass die Matrix SAS^{-1} Diagonalgestalt hat. Bestimmen Sie eine solche Matrix S.

Aufgabe 2: Es seien K ein Körper, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$. Zeigen Sie, dass die $n \times n$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $\chi_A(T) = (-1)^n(T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_0)$ besitzt. Folglich existiert zu jedem normierten Polynom $P \in K[T]$ vom Grad n ein n-dimensionaler K-Vektorraum V und ein Element $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ mit $\chi_f(T) = (-1)^n P(T)$.

Aufgabe 3: Es seien K ein Körper, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $A \in M_{n\times n}(K)$. Zeigen Sie: Die Abbildung $\Phi_A : M_{n\times n}(K) \to M_{n\times n}(K)$, gegeben durch $\Phi_A(B) := A \cdot B$, ist K-linear. Es gilt $\chi_{\Phi_A}(T) = \chi_A(T)^n$.

Hinweis: Berechnen Sie die darstellende Matrix von Φ_A bezüglich der Basis $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ von $M_{n\times n}(K)$, wobei $E_{ij} = (e_{st})_{s,t}$ die Matrix ist mit den Einträgen $e_{st} = 1$ für $(s,t) = (i,j)$ und $e_{st} = 0$ sonst.

Aufgabe 4: Es sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Eine K-lineare Abbildung $f : V \to V$ heißt *nilpotent*, falls es eine natürliche Zahl m gibt mit $f^m = 0$. Es sei $V \neq \{0\}$. Zeigen Sie:

(i) Ist f nilpotent, so ist $0 \in K$ ein Eigenwert von f, und f besitzt keine weiteren Eigenwerte in K. Wenn umgekehrt f die Eigenschaft hat, dass $\chi_f(0) = 0$ und $\chi_f(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in K \setminus \{0\}$, ist f dann nilpotent?

(ii) f ist genau dann nilpotent, wenn $\chi_f(T) = (-T)^{\dim(V)}$.

Hinweis zu (ii): Verwenden Sie den Satz von Cayley-Hamilton oder führen Sie unter Verwendung von Blatt 11, Aufgabe 1 aus dem Wintersemester einen Induktionsbeweis nach $\dim(V)$.