

Aufgabe 1 (4 Punkte): Bestimmen Sie in den folgenden Fällen den Index der zu der gegebenen quadratischen Form $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ gehörenden Bilinearform b . Ermitteln Sie, ob b positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

(i) $q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$ auf $V = \mathbb{R}^2$

(ii) $q(x_1, x_2) = \varepsilon_1x_1^2 + \varepsilon_2x_2^2$ auf $V = \mathbb{R}^2$ für feste Elemente $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$

(iii) $q(x_1, x_2, x_3) = -9x_1^2 - 16x_1x_2 - 8x_2^2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3 - 2x_3^2$ auf $V = \mathbb{R}^3$

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum der endlichen Dimension $n \geq 1$ und x_0, \dots, x_n eine Familie von Elementen von V mit der Eigenschaft, dass die Menge $\{x_j - x_0 \mid 1 \leq j \leq n\}$ eine Basis von V bildet. Zeigen Sie, dass für jede Familie y_0, \dots, y_n von Elementen von V genau eine affine Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ existiert, sodass $\varphi(x_j) = y_j$ gilt für alle $j \in \{0, \dots, n\}$.

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Quadriken Q_1 und Q_2 gegeben durch

$$Q_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 1\} \quad \text{und}$$

$$Q_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + x_2 - x_3 = 0\}.$$

Untersuchen Sie die Quadriken auf ihre Echtheit und die Existenz eines Zentrums hin, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein Zentrum.