Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II SS 2009
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 11
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 06.07.2009, 16:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ die Quadrik gegeben durch

$$Q := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_2x_3 - 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2\}.$$

Ferner bezeichne Q' das einschalige Hyperboloid

$$Q' := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

Geben Sie eine bijektive affine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an, für die $\varphi(Q') = Q$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei $\alpha \in \mathbb{R}^*$ und $Q_\alpha \subseteq \mathbb{R}^3$ die Quadrik

$$Q_\alpha := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{5}x_1 + 4\sqrt{5}x_2 = \alpha\}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter α, zu welcher der Standardquadriken Q_α affin äquivalent ist.

Aufgabe 3: Es sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$, V ein zweidimensionaler K-Vektorraum und $b : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform vom Rang 2 mit Isotropieindex 1. Zeigen Sie:

(i) Es gibt Vektoren $u, w \in V$ mit $b(u, u) = 0$ und $b(u, w) = 1$.

(ii) Es gibt ein Element $\alpha \in K$, sodass der Vektor $v := \alpha u + w$ die Bedingung $b(v, v) = 0$ erfüllt.

(iii) Die Menge $\{u, v\}$ ist eine Basis von V, bezüglich welcher b durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dargestellt wird.