Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II SS 2009
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 12
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 13.07.2009, 16:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei K ein Körper. Eine Teilmenge $G \subset K^2$ der Form

$$G = \{\underline{x} \in K^2 \mid \ell(\underline{x}) = c\}$$

mit einer Linearform $\ell \in (K^2)^* \setminus \{0\}$ und einem Element $c \in K$ bezeichnet man als *affine Gerade*. Zeigen Sie, dass die projektiven Abschlüsse zweier verschiedener affiner Geraden genau einen gemeinsamen Punkt in $\mathbb{P}^2(K)$ besitzen.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Betrachten Sie die affinen Quadriken Q_1, Q_2 und Q_3 in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
Q_1 &:= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 = 1\}, \\
Q_2 &:= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1^2 + 14x_1x_2 + 10x_2^2 + 10x_1 + 14x_2 = -4\} \text{ und} \\
Q_3 &:= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2 + 10x_1 + 12x_2 = -6\}.
\end{aligned}$$

Welche von diesen sind zueinander affin äquivalent? Welche der zugehörigen projektiven Quadriken $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$ und $\overline{Q}_3$ sind zueinander projektiv äquivalent?

Aufgabe 3: Es sei K ein Körper. Für ein Element $B \in \mathrm{GL}_2(K)$ werde mit $f_B : \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(K)$ die zugehörige Kollineation bezeichnet. Zeigen Sie:

(i) Ist $p \in \mathbb{P}^1(K)$, so ist die Menge $G_p := \{B \in \mathrm{GL}_2(K) \mid f_B(p) = p\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(K)$.

(ii) Es gilt $G_{[1:0]} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K) \mid c = 0\}$.

(iii) Zu je zwei Punkten p und p' in $\mathbb{P}^1(K)$ existiert ein Element $S \in \mathrm{GL}_2(K)$ mit $G_p = S^{-1} \cdot G_{p'} \cdot S := \{S^{-1} \cdot B \cdot S \mid B \in G_{p'}\}$.