

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K -Vektorraum und $f \in \text{Hom}_K(V, V)$. Bezüglich einer geeigneten Basis von V besitze die darstellende Matrix A_f von f die Gestalt

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

mit einem Element $\lambda \in K$. Zeigen Sie, dass V f -unzerlegbar ist.

Hinweis: Eine f -invariante Zerlegung von V führt zu einer Zerlegung von χ_f . Verwenden Sie, dass $(f - \lambda \cdot \text{id}_V)^n \neq 0$ für jede natürliche Zahl $n < \dim(V)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K -Vektorraum. Ferner seien $f, g \in \text{Hom}_K(V, V)$ mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie:

- (i) Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f , so ist der zugehörige Eigenraum V_λ g -invariant.
- (ii) Ist $V = \bigoplus_{j=1}^k U_j$ eine Zerlegung von V in eine direkte Summe g -invarianter Untervektorräume U_j , so ist g genau dann diagonalisierbar, wenn $g|_{U_j}$ diagonalisierbar ist für alle $j \in \{1, \dots, k\}$.
- (iii) Sind f und g diagonalisierbar, so besitzt V eine Basis, deren Elemente Eigenvektoren sowohl von f als auch von g sind.

Aufgabe 3: Es sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K -Vektorraum und $f \in \text{Hom}_K(V, V)$. Eine *Flagge* in V ist eine Familie (V_0, \dots, V_n) von Untervektorräumen von V mit $V_0 = \{0\}$, $V_n = V$, $V_i \subseteq V_{i+1}$ und $\dim(V_{i+1}/V_i) = 1$ für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Eine Flagge heißt *f -invariant*, falls alle auftretenden Untervektorräume V_i f -invariant sind. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) V besitzt eine f -invariante Flagge.
- (ii) V besitzt eine Basis, bezüglich der die darstellende Matrix $(a_{ij})_{i,j}$ von f die Eigenschaft hat, dass $a_{ij} = 0$ für $i > j$.
- (iii) Das charakteristische Polynom von f zerfällt in ein Produkt von Linearfaktoren.