**Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II** SS 2009
**Prof. Dr. P. Schneider** Blatt 4
**Dr. J. Kohlhaase**
Abgabetermin: Montag, 11.05.2009, 16:00 Uhr, Briefkästen

---

**Aufgabe 1 (4 Punkte):** Es seien $V$ ein endlich erzeugter $\mathbb{C}$-Vektorraum, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $f$, $\chi_f(T) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - T)^{\ell_i}$ und $\mu_f(T) = \prod_{i=1}^r (T-\lambda_i)^{k_i}$. Für $i \in \{1,\dots,r\}$ sei der Untervektorraum $H_i$ von $V$ definiert durch $H_i := \ker((f - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)^{k_i})$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $H_i = q_i(f)(V)$ mit $q_i(T) := \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} (T-\lambda_j)^{k_j} \in \mathbb{C}[T]$.

(ii) Es gilt $V = \oplus_{i=1}^r H_i$ und $\dim(H_i) = \ell_i$ für alle $i \in \{1,\dots,r\}$.

**Hinweis:** Verwenden Sie Lemma 21 und Satz 22 der Vorlesung, und führen Sie in (ii) einen Induktionsbeweis nach $r$.

**Aufgabe 2 (4 Punkte):** Es sei $A \in \mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$ derart, dass $SAS^{-1}$ Jordansche Normalform besitzt. Bestimmen Sie das Minimalpolynom der durch $A$ dargestellten linearen Abbildung $\ell_A$.

**Hinweis:** Es gilt $\chi_{\ell_A}(T) = (2-T)^2(1-T)^3$.

**Aufgabe 3:** Es sei $V$ ein dreidimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ferner seien $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$ mit $f^3 = g^3 = 0$. Zeigen Sie, dass die Minimalpolynome von $f$ und $g$ genau dann übereinstimmen, wenn ein Element $h \in \mathrm{GL}(V)$ existiert mit $h^{-1} \circ f \circ h = g$.

**Hinweis:** Diskutieren Sie die möglichen Jordanschen Normalformen von $f$ und $g$.