

Übungsaufgaben zur Vorlesung “ p -adische Lie-Gruppen”

P. Schneider
J. Kohlhaase

WS 2007/2008
Blatt 1

Aufgabe 1:

Sei (X, d) ein vollständiger, ultrametrischer Raum und sei $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ eine absteigende Folge von Bällen mit $d(B_1) > d(B_2) > \dots$ und $\inf_i d(B_i) > 0$. Dann ist $Y := X \setminus (\bigcap_i B_i)$ vollständig aber nicht sphärisch vollständig.

Aufgabe 2:

Sei (X, d) ein ultrametrischer Raum mit den Eigenschaften

- X enthält eine abzählbare dichte Teilmenge.
- für alle $x \in X$ liegt die Wertemenge $d(x, X) \subseteq [0, \infty)$ dicht.

Dann ist X nicht sphärisch vollständig.

Hinweis: Sei $r_0 > r_1 > \dots$ eine Folge von Radien mit $r := \inf r_i > 0$. Sei $x \in X$ und betrachte $B := B_{r_0}(x)$. B enthält zwei disjunkte Bälle B_0, B_1 mit Radius r_1 . Induktiv erhält man eine durch die binären Folgen indizierte Familie $(B_{\underline{i}})_{\underline{i} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}}$ von Teilmengen von X . Hierbei ist $B_{\underline{i}}$ leer oder ein abgeschlossener Ball mit Radius r .

Aufgabe 3:

Sei (X, d) ein ultrametrischer Raum.

- Sei $x \in X$ und $d(x, X) \subseteq [0, \infty)$ dicht. Die bezüglich Inklusion geordnete Menge M_x der x enthaltenden “abgeschlossenen” Bälle in X kann ordnungserhaltend bijektiv auf die Halbgerade $[0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ abgebildet werden.
- Sei $d(x, X) \subseteq [0, \infty)$ dicht für alle $x \in X$. Vermöge i) identifiziere man M_x mit dem topologischen Raum $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei T_X die bezüglich Inklusion (partiell) geordnete Menge der abgeschlossenen Bälle in X . Zeigen Sie, dass auf T_X vermöge der Bedingung “ $U \subseteq T_X$ offen $\iff \forall x \in X : U \cap M_x$ offen” eine Topologie definiert wird. Ist sie Hausdorffsch? Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ die Inklusion $M_x \subseteq T_X$ stetig ist und abgeschlossen, insbesondere also ein Homöomorphismus aufs Bild.
- T_X ist wegzusammenhängend.
(T_X ist sogar einfach zusammenhängend.)

Aufgabe 4:

Sei $K|\mathbb{Q}_p$ endlich und I eine nicht endliche Menge.

- Die Abbildung

$$\Delta : c_0(I) \longrightarrow (c_0(I)')', f \longmapsto (\delta \longmapsto \delta(f)) ,$$

ist wohldefiniert und stetig.

- Es gibt ein von Null verschiedenes stetiges Funktional $\delta \in (c_0(I)')' \simeq \ell^\infty(I)'$, das auf dem abgeschlossenen Unterraum $c_0(I)$ von $\ell^\infty(I)$ verschwindet.
Hinweis: $\ell^\infty(I)/c_0(I) \simeq c_0(J)$ für eine Indexmenge J .
- Die Abbildung Δ in i) ist injektiv aber nicht surjektiv.