Übungsaufgaben zur Vorlesung "p-adische Lie-Gruppen"

P. Schneider WS 2007/2008

J. Kohlhaase Blatt 11

Aufgabe 1:
Seien H und G Liegruppen, und sei $\varphi : H \longrightarrow G$ ein Homomorphismus von Liegruppen, d.h. ein Homomorphismus von Gruppen und eine lokal analytische Abbildung der unterliegenden Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Lie}(\varphi) := T_e(\varphi) : \mathrm{Lie}(H) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G)$$

ist ein Homomorphismus von Liealgebren.
Hinweis: Sind $s, t \in \mathrm{Lie}(G)$ und $D_s, D_t : C^{\mathrm{an}}(G, K) \longrightarrow C^{\mathrm{an}}(G, K)$ die zugehörigen Derivationen, so folgt aus $D_s(f) \circ \varphi = D_t(f) \circ \varphi$ für alle $f \in C^{\mathrm{an}}(G, K)$ bereits die Gleichheit $s = t$.

Aufgabe 2:
Sei K ein Körper und $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über K.

i) Die universelle Einhüllende $U(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$ ist ein nullteilerfreier Ring.
Hinweis: $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ ist nullteilerfrei.

ii) Sei $I \subseteq U(\mathfrak{g})$ ein (einseitiges) Ideal. Für $n \geq 0$ setze $I_n := I \cap U_n(\mathfrak{g})$. Dann ist $\mathrm{gr}\, I := \oplus_{n \geq 0}(I_n + U_{n-1}(\mathfrak{g}))/U_{n-1}(\mathfrak{g})$ in natürlicher Weise ein (einseitiges) Ideal von $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$. Ist $\mathrm{gr}\, I$ endlich erzeugt über $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$, so ist I endlich erzeugt über $U(\mathfrak{g})$.
Hinweis: Sei $(\bar{x}_i)_{1 \leq i \leq m}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{gr}\, I$ über $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$, wobei ohne Einschränkung $\bar{x}_i = x_i + U_{n(i)-1}(\mathfrak{g})$ gelte mit $x_i \in I_{n(i)}$ für ein $n(i) \geq 0$. Zeigen Sie per Induktion nach k, dass sich jedes Element $x \in I_k$ als Linearkombination der $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ darstellen lässt.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei $T(V)$ die Tensoralgebra von V und $I(V)$ das von den Elementen $v \otimes w - w \otimes v$ mit $v, w \in V$ erzeugte zweiseitige Ideal von $T(V)$. Die K-Algebra $S(V) := T(V)/I(V)$ heißt die symmetrische Algebra von V. Zeigen Sie: Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine K-Basis von V, so setzt sich die Abbildung $\{X_i\}_{i \in I} \longrightarrow S(V)$, $X_i \longmapsto v_i + I(V)$, eindeutig zu einem Isomorphismus $K[\{X_i\}_{i \in I}] \longrightarrow S(V)$ von K-Algebren fort.