Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2008/2009
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 9
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 15.12.2008, 16:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Welche der folgenden linearen Gleichungssysteme sind lösbar? In welchen Fällen gibt es eindeutige Lösungen? Verwenden Sie Bemerkung 2 und Satz 7 aus Kapitel V der Vorlesung.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 1$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass jeder affine Unterraum in K^n die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit Koeffizienten in K ist.

Aufgabe 3: Es seien m und n natürliche Zahlen, K ein Körper, $A_1, A_2 \in \mathrm{M}_{m \times n}(K)$ und $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \in K^m$. Zeigen Sie: Haben die linearen Gleichungssysteme $A_1 \cdot \underline{x} = \underline{y}_1$ und $A_2 \cdot \underline{x} = \underline{y}_2$ dieselbe Lösungsmenge L, so gilt $L = \emptyset$ oder $\ker(\ell_{A_1}) = \ker(\ell_{A_2})$. Folgt umgekehrt aus $\ker(\ell_{A_1}) = \ker(\ell_{A_2})$ im Allgemeinen schon, dass die beiden linearen Gleichungssysteme dieselbe Lösungsmenge besitzen?