

**Kreuzen Sie bei den folgenden Aufgaben genau die richtigen Antworten an. Haben Sie bei einer Aufgabe die richtige Kombination gewählt, so erhalten Sie bei der Auswertung am Ende für diese Aufgabe einen Punkt, anderenfalls keinen.**

**Aufgabe 1:** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (A) Die leere Menge ist ein Untervektorraum von  $V$ .
- (B) Zu jedem Vektor  $v \in V$  existiert ein Element  $\lambda \in K$  mit  $\lambda \cdot v = v$ .
- (C) Sind  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$  und ist  $v \in V$  mit  $\lambda_1 \cdot v = \lambda_2 \cdot v$ , so gilt  $\lambda_1 = \lambda_2$ .
- (D) Für alle  $\lambda \in K$  und  $v \in V$  gilt  $\lambda \cdot (-v) = (-\lambda) \cdot v$ .

**Aufgabe 2:** Betrachten Sie in  $\mathbb{R}^2$  die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (A) Die Vektoren  $\{v_1, v_2\}$  sind linear abhängig.
- (B) Die Menge  $\{v_1, v_2, v_3\}$  ist ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^2$ .
- (C) Jede zweielementige Teilmenge von  $\{v_1, v_2, v_3\}$  ist eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ .
- (D) Die Menge  $\{v_1, v_2, v_3\}$  enthält eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe 3:** Es sei  $V$  ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$ . Welche der folgenden Vektorräume sind isomorph zu  $K^3$ ?

- (A)  $V \oplus V \oplus V$
- (B)  $V$
- (C)  $\text{Hom}_K(V, K)$
- (D)  $\ker(\ell)$  mit  $\ell \in \text{Hom}_K(K^4, K)$  und  $\ell \neq 0$ .

**Aufgabe 4:**  $V$  bzw.  $W$  seien Vektorräume der Dimension 5 bzw. 3 über einem Körper  $K$ , und  $f : V \rightarrow W$  sei eine lineare Abbildung. Es seien  $\{v_1, \dots, v_5\}$  bzw.  $\{w_1, w_2, w_3\}$  Basen von  $V$  bzw.  $W$  und  $A_f = (a_{ij})_{i,j}$  die  $f$  zugeordnete Matrix. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(A) Für alle  $1 \leq j \leq 5$  gilt  $f(v_j) = \sum_{i=1}^3 a_{ij} w_i$ .

(B) Die Matrix  $A_f$  hat 5 Zeilen und 3 Spalten.

(C)  $\text{im}(f) = W \Leftrightarrow \text{rang}(A_f) = 3$

(D)  $\text{rang}(A_f) \leq 3$

**Aufgabe 5:** Welche Aussagen über lineare Gleichungssysteme über den reellen Zahlen sind richtig?

(A) Es gibt keine eindeutig lösbaren linearen Gleichungssysteme.

(B) Besitzt ein lineares Gleichungssystem keine Lösung, so ist es inhomogen.

(C) Ist ein lineares Gleichungssystem lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, so besitzt es unendlich viele Lösungen.

(D) Die Summe zweier Lösungen eines linearen Gleichungssystems ist wieder eine Lösung.