Übungsaufgaben zur Einführung in die Algebra Wintersemester 0910
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 12
Dr. Tobias Schmidt
Abgabetermin: Donnerstag, 21.01.2010, vor Vorlesungsbeginn, Briefkästen

---

Aufgabe 1: Es seien $\zeta_m, \zeta_n \in \mathbb{C}$ primitive m-te bzw. n-te Einheitswurzeln, wobei $(m, n) = 1$. Man zeige:

(i) $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}$.

(ii) $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n)/\mathbb{Q}) \simeq Gal(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \times Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$.

Aufgabe 2: Man mache sich zunächst klar, daß es einen Körper K mit 4096 Elementen gibt.

(i) Wieviele Teilkörper hat K, und was sind ihre Ordnungen?

(ii) Von welchen Elementen werden die multiplikativen Gruppen der Teilkörper erzeugt, wenn $K^\times$ vom Element x erzeugt wird?

(iii) Welche Enthaltenseinsbeziehungen bestehen zwischen den Teilkörpern von K?

Aufgabe 3: Es sei $k = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und K der Zerfällungskörper des Polynoms $f(x) = x^6 - \bar{5} \in k[x]$. Man zeige:

(i) Ist $\alpha \in K$ eine Nullstelle von f, so gilt $f(x) = \prod\limits_{\zeta \in k^\times} (x - \zeta\alpha)$ in $K[x]$.

(ii) $f(x)$ ist irreduzibel über k.
(Hinweis: Bestrachten Sie einen irreduziblen Teiler g von f und seinen konstanten Koeffizienten $g(0) \in k^\times$. Dann benutzen Sie $< \bar{5} >= (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$.)

(iii) $Gal(K/k) \simeq k^\times$ und die Erweiterung K/k enthält genau 4 Zwischenkörper.