Übungsaufgaben zur Einführung in die Algebra Wintersemester 0910
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 9
Dr. Tobias Schmidt
Abgabetermin: Donnerstag, 17.12.2009, vor Vorlesungsbeginn, Briefkästen

---

Aufgabe 1: Sei E/K eine endliche Körpererweiterung. Dann ist für jedes $c \in E$ die Multiplikation mit c

$$m_c : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto cx$$

ein K-linearer Endomorphismus von E. Man zeige, daß das Minimalpolynom $Min(c; K; x) \in K[x]$ wie in der Vorlesung definiert mit dem Minimalpolynom des Endomorphismus m_c übereinstimmt.

Aufgabe 2: Leiten Sie aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ab, daß für jedes $\alpha \in \mathbb{Q}$ die komplexe Zahl $e^{\alpha\pi i} = \exp(\alpha\pi i)$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist. Schliessen Sie weiter unter Verwendung der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, daß für jedes $\alpha \in \mathbb{Q}$ die reellen Zahlen $\cos(\alpha\,\pi)$ und $\sin(\alpha\,\pi)$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind.

Aufgabe 3: Man beweise zunächst unter Benutzung von Aufgabe 3, Blatt 8, daß $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}\right] = 4$ gilt. Dann zeige man:

(i) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ ist das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ über dem Teilkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Folgern Sie, daß $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ liegt und daher $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ gilt.

(ii) $x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 - 2\sqrt{2}x - 1)(x^2 + 2\sqrt{2}x - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ ist das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.