

**Aufgabe 1:** Es sei  $R$  ein Integritätsbereich mit einer Abbildung  $R - \{0\} \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , die die folgende Eigenschaft hat: für beliebige  $a \in R - \{0\}, b \in R$  gibt es  $q, r \in R$  mit

$$b = qa + r \quad \text{und} \quad \{r = 0 \quad \text{oder} \quad \nu(r) < \nu(a)\}.$$

Zeigen Sie, daß  $R$  ein Hauptidealring ist. Welche Beispiele für einen solchen Ring  $R$  kennen Sie?

**Aufgabe 2:** Sei  $p$  eine Primzahl und  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  mit  $(n, p) = 1$ . Man zeige: Das  $n$ -te Kreisteilungspolynom  $\Phi_n$  ist irreduzibel über  $\mathbb{F}_p$  genau dann, wenn die Restklasse  $p + n\mathbb{Z}$  die Einheitengruppe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  erzeugt.

**Aufgabe 3:** Seien  $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_{>1}$  paarweise teilerfremde ganze Zahlen, und sei  $n = n_1 \cdot \dots \cdot n_r$ . Man gebe einen kanonischen Isomorphismus an

$$\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n} | \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^{n_1}} | \mathbb{F}_p) \times \dots \times \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^{n_r}} | \mathbb{F}_p).$$

**Aufgabe 4:** Man bestimme alle Zwischenkörper der Erweiterung  $\mathbb{Q}(\zeta_{18}) | \mathbb{Q}$ . Hierbei ist  $\zeta_{18} \in \mathbb{C}$  eine primitive 18-te Einheitswurzel.

**Aufgabe 5:** Es sei  $G$  eine Gruppe. Man zeige:

- (i) Ist  $H$  ein Normalteiler von  $G$ , sodaß  $H$  und  $G/H$  auflösbar, so ist  $G$  auflösbar.
- (ii) Sind  $H, H'$  auflösbare Normalteiler von  $G$ , so auch  $H \cdot H'$ .
- (iii) Es existiert eine eindeutig bestimmte größte normale auflösbare Untergruppe in  $G$ . Diese ist invariant unter allen Automorphismen von  $G$ .

**Bemerkung:** Dieses Übungsblatt soll Ihnen zur Wiederholung dienen und hat nichts mehr mit der Klausurzulassung zu tun.