Übungsaufgaben zur Lokalen Klassenkörpertheorie Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 2
Dipl. Math. M. Bornmann
Abgabetermin: Donnerstag, 30.10.2014, Briefkasten 23

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Es seien R ein noetherscher kommutativer Ring und M, N zwei endlich erzeugte R-Moduln. Zeigen Sie:
(i): $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist ein endlich erzeugter R-Modul.
(ii): $\mathrm{Ext}^q_R(M, N)$ ist ein endlich erzeugter R-Modul für alle $q > 0$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Seien M ein $\mathbb{Z}$-Modul und $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Ferner sei $M[n] := \{x \in M : nx = 0\}$ sein n-Torsions-Untermodul. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_q(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M) = \begin{cases} M/nM, & \text{falls } \ q = 0 \\ M[n], & \text{falls } q = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}[X]/\langle X^2 - 1\rangle$. Wir versehen $\mathbb{Z}$ mit der eindeutigen R-Modulstruktur, so dass die Restklasse von X trivial auf $\mathbb{Z}$ operiert. Zeigen Sie: Es gibt keine ganze Zahl $r \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung $P^\bullet$ mit $P^q = 0$ für $q > r$ besitzt.
Hinweis: Finden Sie zunächst eine explizite projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$, um die Gruppen $\mathrm{Tor}^R_q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ zu berechnen.