Übungsaufgaben zur Lokalen Klassenkörpertheorie Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 5
Dipl. Math. M. Bornmann
Abgabetermin: Donnerstag, 20.11.2014, Briefkasten 23

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Es seien G eine endliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und M ein G-Modul. Dann ist $N_{G/H} : M_G \to M_H, m \mapsto \sum_{gH \in G/H} g^{-1}m$ ein wohldefinierter Homomorphismus von abelschen Gruppen. Zeigen Sie:
(i): $N_{G/H}$ schränkt sich ein zu einem Homomorphismus von $\hat{H}^{-1}(G, M)$ nach $\hat{H}^{-1}(H, M)$, den wir im folgenden auch mit $N_{G/H}$ bezeichnen.
(ii): Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^{-1}(G,M) & \overset{\cong}{\to} & \hat{H}^0(G,\Omega M) \\ \downarrow N_{G/H} & & \downarrow \mathrm{res} \\ \hat{H}^{-1}(H,M) & \overset{\cong}{\to} & \hat{H}^0(H,\Omega M) \end{array}$$

ist kommutativ, wobei die horizontalen Isomorphismen über die Methode der Dimensionsverschiebung gegeben seien.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

(i) Es seien G eine endliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $q \geq 1$. Ferner sei $0 \to L \to M \to N \to 0$ eine exakte Sequenz von G-Moduln. Zeigen Sie, dass die Restriktionsabbildung mit dem Verbindungshomomorphismus vertauscht, d.h. dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^{q-1}(G,N) & \overset{\delta}{\to} & \hat{H}^q(G,L) \\ \downarrow \mathrm{res} & & \downarrow \mathrm{res} \\ \hat{H}^{q-1}(H,N) & \overset{\delta}{\to} & \hat{H}^q(H,L) \end{array}$$

kommutativ ist.
(ii): Es seien $m|n$ zwei natürliche Zahlen und $q \geq 0$. Dann gilt $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \cong \mathbb{Z}[X]/\langle X^n - 1\rangle$ und man erhält wie in Aufgabe 3 von Blatt 2 eine freie Auflösung

$$\ldots \overset{\cdot N}{\to} R \overset{\cdot(X-1)}{\to} R \overset{\cdot N}{\to} R \overset{\cdot(X-1)}{\to} R \overset{X \mapsto 1}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

des trivialen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$, wobei $N = X^{n-1} + \ldots + X + 1$ und $R = \mathbb{Z}[X]/\langle X^n - 1\rangle$. Es folgt

$$\hat{H}^q(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, & \text{falls } q \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } q \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir fassen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mittels $x + m\mathbb{Z} \mapsto \frac{n}{m}x + n\mathbb{Z}$ als Untergruppe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auf. Zeigen Sie, dass die Restriktionsabbildung $\hat{H}^q(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \hat{H}^q(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ surjektiv ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Es seien G eine endliche Gruppe der Ordnung m und K ein Körper, so dass $\mathrm{char}(K)$ kein Teiler von m ist. Ferner seien M und N zwei $K[G]$-Moduln. Wir versehen $\mathrm{Hom}_K(M, N)$ durch

$$(gf)(m) = g(f(g^{-1}m)) \text{ für } g \in G, m \in M, f \in \mathrm{Hom}_K(M, N)$$

mit der Struktur eines G-Moduls.
(i): Zeigen Sie $H^q(G, M) = 0$ für $q \geq 1$.
(ii): Es seien $0 \to L \to M \to N \to 0$ eine exakte Sequenz von $K[G]$-Moduln und P ein weiterer $K[G]$-Modul. Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_{K[G]}(P, L) \to \mathrm{Hom}_{K[G]}(P, M) \to \mathrm{Hom}_{K[G]}(P, N) \to 0$$

von $\mathbb{Z}$-Moduln exakt ist.
(iii): Folgern Sie den Satz von Maschke: Jeder $K[G]$-Modul ist halbeinfach.