

# 1 Bewertung der Teilkompetenzen „Verstehen“ und „Vereinfachen/ Strukturieren“ und ihre Relevanz für das mathematische Modellieren

*Madlin Böckmann und Stanislaw Schukajlow, Universität Münster*

## Zusammenfassung

Die Teilkompetenzen „Verstehen“ und „Vereinfachen/ Strukturieren“ sind wichtige Bestandteile des Modellierens, deren Erfassung und Bewertung eine hohe wissenschaftliche und unterrichtspraktische Relevanz haben. Im Beitrag wird zunächst theoretisch beschrieben, welche Bedeutung diese Teilkompetenzen für das Modellieren haben, welche Aktivitäten dabei verlangt werden und wie die beiden Teilkompetenzen sowie die zugehörigen Aktivitäten bisher gemessen wurden. Anschließend wird eine empirische Studie vorgestellt, bei der die Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren durch drei Indikatoren (Selektion von wichtigen Informationen, Treffen von Annahmen und das Zeichnen einer Skizze) erfasst wurden. Zudem wurde die Gesamtkompetenz Modellieren erfasst. Es zeigte sich, dass (1) es möglich ist, die Teilkompetenzen und die Gesamtkompetenz Modellieren zu erfassen, und (2) mittlere bis kleine Korrelationen zwischen der Gesamtkompetenz Modellieren und den Teilkompetenzen bestehen. Implikationen für die Forschung und für den Unterricht werden diskutiert.

## 1.1 Einleitung

Seit der Einführung der Bildungsstandards im Jahr 2004 ist das Modellieren im Fach Mathematik als eine prozessbezogene Kompetenz als Bildungsziel festgeschrieben (KMK 2004). Dennoch weisen Analysen von Klassenarbeiten darauf hin, dass realitätsbezogene Aufgaben (einschließlich Modellierungsaufgaben) selten im Unterricht eingesetzt werden (Drüke-Noe 2014; Jordan et al. 2008, S. 99). Ein Grund dafür kann sein, dass anspruchsvolle Modellierungsaufgaben bisher in zentralen Prüfungsaufgaben wie dem Abitur selten bis gar nicht vorkommen (Greefrath, G., Siller, H. & Ludwig, M. 2017). Wenn Modellierungsaufgaben im Unterricht einen höheren Stellenwert bekommen sollen, müssen sie in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen einen Platz finden. Dabei kommt die Frage auf, wie offene Modellierungsaufgaben mit mehreren möglichen Lösungen bewertet werden können. Auch für die Untersuchung von wissenschaftlichen Fragestellungen ist von Bedeutung, wie das Modellieren – einschließlich der Teilkompetenzen – erfasst werden kann. Bei der Erfassung von Modellierungskompetenzen über Teilkompetenzen stellt sich zudem die Frage, in welchem Zusammenhang die getesteten Fähigkeiten zur Gesamtkompetenz Modellieren stehen. Diesen Fragen gehen wir im Folgenden nach, indem zunächst die Teilkompetenzen beschrieben werden. Anschließend wird eine Möglichkeit dargelegt, wie die Teilkompetenzen „Verstehen“ und „Vereinfachen/Strukturieren“ erfasst werden können bevor abschließend berichtet wird, wie Schülerinnen und Schüler der Klasse 9 in einer Studie Aufgaben zu diesen Teilkompetenzen und zur Gesamtkompetenz Modellieren gelöst haben und welcher Zusammenhang zwischen den (Teil-)Kompetenzen gefunden wurde.

## 1.2 Bedeutung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren für das Modellieren

Es gibt zahlreiche prozessbezogene Beschreibungen, die angeben, welche Teilschritte beim Lösen einer Modellierungsaufgabe bewältigt werden müssen. Diese Beschreibungen unterscheiden sich in der Anzahl der Schritte und der Stationen, die beim Modellieren durchlaufen werden. Im Folgenden werden Modellierungsprozesse einschließlich der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren anhand des Kreislaufs von Blum und Leiß (2005) beschrieben und an der Aufgabe Trinkpäckchen veranschaulicht.

Dies ist ein Vorabdruck des folgenden Beitrages: Böckmann, M., & Schukajlow, S. (2020). Bewertung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren und ihre Relevanz für das mathematische Modellieren. In G. Greefrath, & K. Maaß (Eds.), Modellierungskompetenzen – Beurteilung und Bewertung (pp. 113-131). Wiesbaden u. a.: Springer., vervielfältigt mit Genehmigung von Springer. Die finale authentifizierte Version ist online verfügbar unter: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9_6)

Das Modellieren ist im Kern eine anspruchsvolle Übersetzung zwischen Mathematik und Realität (Blum et al. 2007), bei der ein Problem aus der Realität durch ein geeignetes mathematisches Modell beschrieben und bearbeitet wird. Der Modellierungskreislauf (siehe • Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.) beginnt mit einer Realsituation, die in der Aufgabe präsentiert wird. In der Aufgabe Trinkpäckchen (siehe • Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.) ist die Realsituation durch ein Foto von einem Karton mit Trinkpäckchen und durch einen Text mit Fragestellung dargelegt. Im ersten Schritt gelangt der Lernende durch das Verstehen der Realsituation zu einem mentalen Modell, dem sogenannten Situationsmodell. Der Begriff Situationsmodell lehnt sich an die Leseforschung an und wird z.B. im Modell von van Dijk und Kintsch (1983) verwendet. Ein Situationsmodell ist eine mentale Repräsentation des Textes, in dem alle verfügbaren Informationen abgebildet sind (Schukajlow 2011). Es kann durch individuelles Vorwissen zum Realkontext angereichert werden. Im zweiten Schritt des Modellierungskreislaufs wird das Situationsmodell vereinfacht, wobei irrelevante Informationen ausgeblendet und Annahmen getroffen werden. Bei der Aufgabe Trinkpäckchen kann zum Beispiel angenommen werden, das Loch für den Strohalm befindet sich genau in der Ecke des Trinkpäckchens, obwohl es in der Realität einige Millimeter versetzt angebracht ist. In diesem Schritt werden relevante Informationen auch strukturiert, indem ihre Beziehung zueinander erfasst wird. Bei Aufgaben zum Inhaltsbereich Geometrie wie bei der Aufgabe Trinkpäckchen können die relevanten Informationen in einer mentalen Vorstellung und/oder in einer externen Repräsentation (einer Skizze) strukturiert werden. So entsteht das Realmodell.

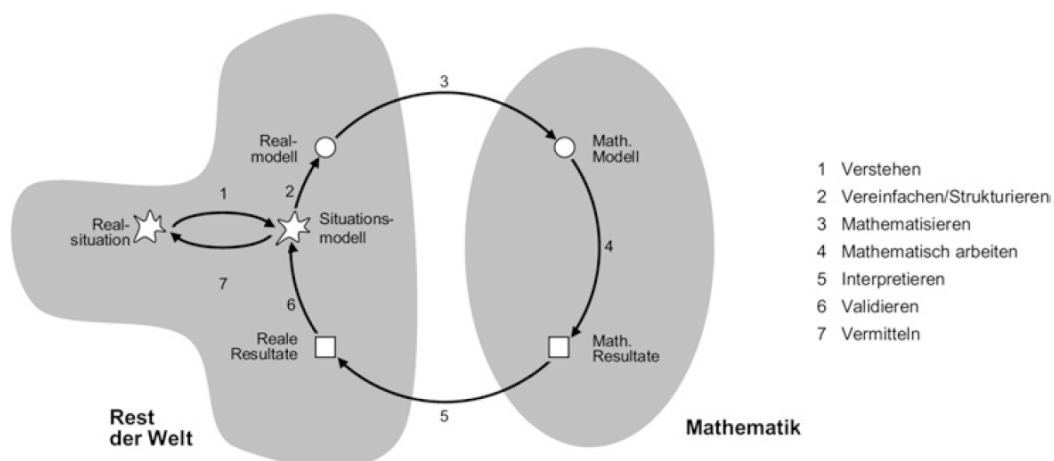


Abb. 1.1 Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2005)



Abb. 1.2 Aufgabe Trinkpäckchen

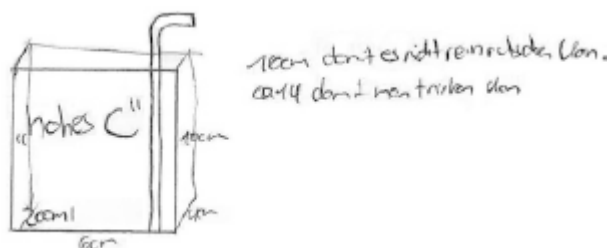
Im dritten Schritt wird das Realmodell mathematisiert, z.B. durch das Aufstellen einer Gleichung. Bei der Aufgabe Trinkpäckchen ist das mathematische Modell der Satz des Pythagoras, der mit Hilfe der Skizze identifiziert werden kann, nämlich  $6^2 + 4^2 = c^2$  und  $c^2 + 10^2 = d^2$ , wobei  $c$  die Diagonale der Bodenfläche ist und  $d$  die Raumdiagonale des Trinkpäckchens. In Schritt vier wird durch mathematisches Arbeiten ein mathematisches Resultat erzielt. In der Beispielaufgabe besteht dieser Schritt aus der doppelten Anwendung des Satzes von Pythagoras. Das mathematische Resultat lautet in

*Dies ist ein Vorabdruck des folgenden Beitrages: Böckmann, M., & Schukajlow, S. (2020). Bewertung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren und ihre Relevanz für das mathematische Modellieren. In G. Greefrath, & K. Maaß (Eds.), Modellierungskompetenzen – Beurteilung und Bewertung (pp. 113-131). Wiesbaden u. a.: Springer., vervielfältigt mit Genehmigung von Springer. Die finale authentifizierte Version ist online verfügbar unter: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9_6)*

dieser Aufgabe  $d = 12,32882 \dots \text{cm}$ . Im nächsten Schritt gelangt der Lernende zu einem realen Resultat, indem interpretiert wird, was das mathematische Resultat außerhalb der Mathematik bedeutet. In der Aufgabe Trinkpäckchen bedeutet die Länge der Raumdiagonale  $d$ , dass der Strohhalm mindestens 12,4 cm lang sein muss, damit er nicht ganz in das Trinkpäckchen rutschen kann. In Schritt sechs wird dieses Ergebnis auf das Situationsmodell zurückbezogen und dabei validiert. In der vorliegenden Aufgabe erscheint die Größenordnung der Länge des Strohhalms plausibel. Bei der Vorstellung, wie die Situation abläuft kommt der Gedanke auf, dass der Strohhalm länger produziert werden könnte, wenn man ihn wieder herausziehen will. Weitere Einflussfaktoren auf die Länge des Strohhalms sind die Position des Lochs in der Verpackung und die Modellierung des Strohhalms durch einen Zylinder statt durch eine Strecke. Die genannten Faktoren können durch eine Schätzung das Endergebnis direkt beeinflussen oder man startet einen neuen Modellierungskreislauf, um eine realistischere Schätzung der Länge zu bekommen. Im letzten Schritt wird das Ergebnis vermittelt, indem der Lösungsweg und eine Antwort formuliert werden. In diesem Beispiel kann der Antwortsatz lauten: Der Strohhalm sollte mindestens 12,4 cm lang sein, damit er nicht komplett in das Trinkpäckchen rutschen kann.

Nach dem Klassifikationsschema für Modellierungsaufgaben von Maaß (2010) kann diese Modellierungsaufgabe wie folgt charakterisiert werden: Zur Lösung der Aufgabe muss der gesamte Modellierungsprozess durchlaufen werden. Die Aufgabe wird durch einen Text mit Bild präsentiert und sie enthält sowohl überflüssige Daten (z.B. 200 ml) als auch fehlende Angaben (z.B. die genaue Position des Lochs). Die Aufgabe enthält authentische Daten und ist damit realitätsnah. Die beschriebene Realsituation stammt aus dem Alltag, da sie jedem begegnen kann. Zu Lösung der Aufgabe wird ein deskriptives Modell verwendet, das die Realsituation mathematisch beschreibt. Die Aufgabe ist offen, weil verschiedene Annahmen über Position und Dicke des Strohhalms getroffen werden können und weil verschiedene Lösungswege möglich sind (maßstabsgetreue Skizzen oder Anwendung des Satz des Pythagoras).

Die Analyse der Modellierungsaktivitäten zeigt, dass die Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren für den gesamten Modellierungsprozess wichtig sind, da die einzelnen Schritte im Modellierungskreislauf aufeinander aufbauen und jeder nachfolgende Schritt die erfolgreiche Bewältigung dieser ersten beiden Schritte voraussetzt. Wurde die Situation nicht verstanden, konstruiert man ein falsches Situationsmodell und kann somit bei der weiteren Aufgabenbearbeitung nicht zu einer richtigen Lösung kommen. Wird ein richtiges Situationsmodell nicht angemessen vereinfacht, so werden im mathematischen Modell Zahlen verwendet, die zur Lösung der Aufgabe irrelevant sind, oder eine Lösung der Aufgabe ist gar nicht möglich, da das Realmodell zu komplex ist, um es in ein mathematisches Modell zu übertragen. Ein Beispiel für eine Schülerlösung, in der ein falsches Situationsmodell konstruiert wurde und eine Vereinfachung nur teilweise stattgefunden hat, ist in **☉ Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** zu sehen. Der Schüler hat ein falsches Situationsmodell gebildet, da er annimmt, der Strohhalm könne nicht zur Seite rutschen und 10cm würden demnach reichen, damit der Strohhalm „nicht reinrutschen kann“. Zudem nimmt er in seine Skizze die Zahl 200 (ml) auf, die zur Lösung der Aufgabe nicht benötigt wird.



**Abb. 1.3** Schülerlösung zur Aufgabe Trinkpäckchen

Im Folgenden werden Möglichkeiten zur Erfassung der Teilkompetenzen Verstehen und

### 1.3 Möglichkeiten der Erhebung der Gesamtkompetenz Modellieren und der Teilkompetenzen

Bei einer komplexen Fähigkeit wie Modellieren können zwei Zugänge bei der Bewertung und auch beim Unterrichten unterschieden werden. Bei einem Zugang zu der Bewertung des Modellierens werden Aufgaben gestellt, die die Gesamtkompetenz Modellieren auf unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus abfragen. Beim anderen Zugang zu der Bewertung werden einzelne Aufgaben zu den Teilkompetenzen gestellt. So kann z.B. in einer Aufgabe nur der Schritt des Validierens einer vorgegebenen Lösung abgefragt werden, ohne dass der gesamte Modellierungsprozess durchlaufen werden muss.

Mehrere Studien haben bereits Teilkompetenzen des Modellierens erhoben und Zusammenhänge untersucht. In einer Studie von Leiss et al. (2010) werden Modellierungskompetenzen wie folgt erfasst: Die Gesamtkompetenz Modellieren wurde z.B. durch Aufgaben wie die Aufgabe „Trinkpäckchen“ erhoben, zu deren Lösung ein kompletter Kreislauf durchlaufen werden muss. Neben diesen Aufgaben wurden Aufgaben gestellt, die „mathematisches Lesen“, innermathematisches Arbeiten und Validieren erfassen. Die Teilkompetenz Validieren kann ebenso wie das Interpretieren nicht isoliert von der Teilkompetenz Verstehen erfasst werden, da das Verstehen Voraussetzung ist, um ein Ergebnis zu deuten und auf Richtigkeit zu prüfen. Während Aufgaben zum innermathematisches Arbeiten und Validieren direkt den entsprechenden Aktivitäten im Modellierungskreislauf zugeordnet werden können, bedürfen Aufgaben zum mathematischen Lesen einer Erläuterung. Die Bearbeitung dieser Aufgaben erfordert von Lernenden, aus mehreren Angaben diejenigen auszuwählen, die für die Beantwortung der Fragestellung wichtig sind. Somit müssen die Lernenden die Situation verstehen und das konstruierte Situationsmodell vereinfachen/strukturieren, damit sie diese Aufgaben bearbeiten können. Es kann vermutet werden, dass das Realmodell zumindest teilweise für eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgaben konstruiert werden muss. Hingegen ist es offen, ob ein Vorgriff auf das mathematische Modell für die Auswahl der Angaben in realen, nicht linear ablaufenden Prozessen bei der Bearbeitung solcher Aufgaben in Einzelfällen erfolgen kann, wie das bei der Bearbeitung der ganzen Modellierungsaufgaben beobachtet wurde (Schukajlow 2011, S. 98). Zwischen dem mathematischen Lesen und der Gesamtkompetenz Modellieren wurde in der Studie von Leiss et al. (2010) ein Zusammenhang mittlerer Stärke mit einer Korrelation von  $r=.49$  festgestellt.

In einer Studie von Krug und Schukajlow (2012) wurden ähnlich wie in der Studie von Leiss et al. (2010) Aufgaben zur Gesamtkompetenz und zu Teilkompetenzen gestellt. Für die Erfassung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren (genannt Auswahl relevanter Informationen) und mathematisches Arbeiten wurden zum Teil dieselben Items verwendet. Zusätzlich wurde in dieser Studie das Treffen von Annahmen erfasst, das sich ebenfalls auf die Schritte Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren bezieht, jedoch eine andere Aktivität in den Mittelpunkt stellt. Die Aufforderung an die Schüler lautete: „Nenne zwei Angaben, die du schätzen musst, damit du die Aufgaben lösen kannst“. Beide abgefragte Facetten der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren korrelierten mittelgroß mit dem Gesamtmodellieren. Mit einer Korrelation von  $r=.45$  ist der gefundene Zusammenhang der Kompetenz Auswahl relevanter Informationen und Gesamtmodellieren ebenfalls mittelgroß. Die Fähigkeit, zu einer gegebenen Situation Annahmen zu treffen, korrelierte mit  $r=.63$  stark mit dem Gesamtmodellieren.

Zöttl et al. (2010) und Brand (2014) erfassen Modellierungskompetenzen mithilfe von Aufgaben zu vier verschiedenen Dimensionen. Die erste Dimension verlangt die Konstruktion eines Realmodells und eines Mathematischen Modells und deckt damit die Teilschritte Verstehen, Vereinfachen/Strukturieren und Mathematisieren des Kreislaufs von Blum und Leiß (2005) ab. Die zweite Dimension ist das Mathematische Arbeiten. Die dritte Dimension deckt die Teilschritte interpretieren und validieren ab. Die vierte Dimension schließlich ist das Gesamtmodellieren, beim Bearbeiten der Aufgaben dieser Dimension muss ein kompletter Modellierungskreislauf durchlaufen werden. Weder die Teilkompetenz Verstehen noch die Teilkompetenz Vereinfachen/Strukturieren wurden in dieser Studie isoliert von

Dies ist ein Vorabdruck des folgenden Beitrages: Böckmann, M., & Schukajlow, S. (2020). Bewertung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren und ihre Relevanz für das mathematische Modellieren. In G. Greefrath, & K. Maaß (Eds.), Modellierungskompetenzen – Beurteilung und Bewertung (pp. 113-131). Wiesbaden u. a.: Springer., vervielfältigt mit Genehmigung von Springer. Die finale authentifizierte Version ist online verfügbar unter: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9_6)  
mathematischen Teilkompetenzen erfasst.

In Anlehnung an die beschriebenen Studien werden im Folgenden Aufgaben vorgestellt, mit denen die Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren erfasst werden können. Anders als in den beschriebenen Studien werden diese Teilschritte des Modellierungskreislaufs hier durch drei Aktivitäten erhoben, die als Indikatoren für die Teilkompetenzen gelten. Ziel ist es, ein möglichst differenziertes Bild zu diesen für das Modellieren basalen Teilkompetenzen zu bekommen.

Der erste Indikator für die Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren ist die Auswahl relevanter Informationen. Bei den Aufgaben müssen Lernende von allen Zahlenangaben im Text nur die zur Lösung relevanten Angaben auswählen. Dieser Aufgabentyp wurde im DISUM-Projekt entwickelt (Blum und Schukajlow im Druck; Leiss et al. 2010; Schukajlow und Leiss 2011). Ein zweiter Indikator für die Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren ist das Treffen von Annahmen. Bei den Aufgaben müssen zu einer Situation Annahmen getroffen werden, die zu einem Realmodell führen. Der dritte und speziell für diese Studie entwickelte Indikator für die Teilkompetenzen ist das Zeichnen einer Skizze. Das Zeichnen einer Skizze erfordert die Konstruktion des Realmodells und verlangt damit neben dem Verstehen und Vereinfachen das Strukturieren relevanter Informationen im besonderen Maße. Einschränkend muss man noch anmerken, dass das Erstellen einer Skizze auch schon das Mathematische Modell vorbereitet, sodass das Mathematisieren durch diesen Aufgabentyp vermutlich in Ansätzen auch erfasst wird. Ein vierter Aufgabentyp erforderte das Durchlaufen eines kompletten Modellierungskreislaufs und erfasst die Gesamtkompetenz Modellieren (siehe Aufgabe Trinkpäckchen in **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**).

### 1.3.1 Auswahl relevanter Informationen

Zum ersten Indikator werden vier verschiedene Aufgaben eingesetzt, von denen hier exemplarisch die Aufgabe „Ameisenstaat“ (Siehe **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**) vorgestellt wird.

#### Aufgabe Ameisenstaat

In dem rechts abgebildeten Ameisenhügel von 1 Meter Höhe und einem Umfang von 5 Metern leben ungefähr 1 Millionen Ameisen.

Da der Ameisenstaat zu groß wird, wandert ein Teil des Volkes aus und gründet in 8 m Entfernung eine Kolonie. Dazu müssen etwa 200 Königinnen gehen. Sonst kann die Kolonie nicht überleben. Jede Königin braucht für ihre Versorgung etwa 500 Arbeiterinnen.



Umkreise alle Zahlenangaben im Text, die du zur Beantwortung der folgenden Frage benötigst. Du brauchst die Frage nicht zu beantworten!

Wie viele Ameisen umfasst der „alte“ Ameisenstaat ungefähr noch, nachdem die Kolonie gerade neu gegründet wurde?

#### Abb. 1.4 Aufgabe Ameisenstaat

Um die Aufgabe Ameisenstaat zu lösen, muss der Lernende die Aufgabe zunächst verstanden haben. Dann sollen durch das Vereinfachen/Strukturieren der gegebenen Informationen die wichtigen Zahlen (1 Millionen, 200 und 500) von den unwichtigen getrennt und in der Aufgabe markiert werden. Bei der Kodierung der Aufgabe wird zu jeder Zahl im Text zunächst erfasst, ob diese markiert wurde (Code 1), oder nicht (Code 0). Daher werden sechs Codes bei der Aufgabe Ameisenstaat vergeben, für jede Zahl im Text einer. Die Code Kombination „001011“ entspricht dann der Lösung, in der genau die relevanten Zahlen 1 Millionen, 200 und 500 markiert sind und keine der überflüssigen Zahlen 1, 5 und 8. Dabei wird nicht bewertet, ob zusätzlich Einheiten oder wichtige Begriffe markiert wurden. Der Grund dafür ist, dass die Auswahl der Zahlen der Mindestanforderung genügt und der Arbeitsauftrag keine Informationen über andere Hervorhebungen enthält. Es ist bei lösungsrelevanten Begriffen strittig, wann diese markiert werden sollen. Z.B. könnte der ganze Satz „Dazu müssen etwa 200 Königinnen gehen.“ markiert werden, oder nur „200 Königinnen gehen“ oder nur „200 Königinnen“ oder nur die Zahl „200“ selbst. Daher ist die Aufgabenstellung so formuliert, dass sie nur nach wichtigen Zahlenangaben im Text fragt, denn bei den Zahlen kann eindeutig entschieden werden, welche wichtig und welche überflüssig sind. In einem weiteren Schritt werden alle richtigen Lösungen mit einem Punkt bewertet, alle anderen Lösungen erhalten null Punkte. Die Codes können bei Bedarf für eine detaillierte



Dies ist ein Vorabdruck des folgenden Beitrages: Böckmann, M., & Schukajlow, S. (2020). Bewertung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren und ihre Relevanz für das mathematische Modellieren. In G. Greefrath, & K. Maaß (Eds.), Modellierungskompetenzen – Beurteilung und Bewertung (pp. 113-131). Wiesbaden u. a.: Springer., vervielfältigt mit Genehmigung von Springer. Die finale authentifizierte Version ist online verfügbar unter: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9_6)

Auswertung genutzt werden, z.B. um zu untersuchen, welche Fehler Lernende bei der Auswahl relevanter Informationen machen.

### 1.3.2 Treffen von Annahmen

Das Treffen von Annahmen ist ein zweiter Indikator für die Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren. Dafür werden vier im Projekt DISUM entwickelte Aufgaben genutzt (siehe Beispielaufgabe Anker in **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**).

#### Aufgabe Anker

Lies dir zunächst die folgende Aufgabe durch. Schreib noch keine Lösung auf!

Der Zweimast-Segler „Saphir“ steuert auf der Ostsee einen sehr beliebten Ankerplatz an, der 2 km von der Ostseeküste entfernt ist. Am Ankerplatz angekommen wirft der Steuermann den Anker der „Saphir“ aus. Dieser verankert sich auf dem etwa 20 Meter tiefen Meeresgrund. Die 25 Meter lange Ankerkette muss dabei vollständig abgerollt werden.

Wie weit kann das Segelschiff höchstens von seinem Ankerplatz weggetrieben werden?



Welche der folgenden Annahmen musst du treffen, wenn du durch Anwenden des Satzes des Pythagoras die obige Aufgabe lösen willst? Kreuze alle entsprechenden Annahmen an!

- Die gesuchte größtmögliche Entfernung zum Ankerplatz wird dann erreicht, wenn die Ankerkette straff gespannt ist.
- Der Ankerplatz ist 2 km von der Ostseeküste entfernt.
- Die Ankerkette wird vollständig abgerollt.
- Es handelt sich um einen Zweimast- (und nicht um einen Einmast-) Segler.
- Der Anker hakt sich fest in den Meeresgrund ein, so dass er von der Strömung nicht herausgerissen werden kann.

#### Abb. 1.5 Aufgabe Anker

Bei der Aufgabe Anker müssen aus fünf möglichen Annahmen drei getroffen werden, um die Aufgabe zu lösen. Die Angaben aus dem Text, dass der Ankerplatz 2 km von der Küste entfernt ist und dass das Boot ein Zweimast-Segler ist, sind irrelevant. Die anderen drei Annahmen sind wichtig, um die Aufgabe zu lösen: Die größtmögliche Entfernung, nach der in der Fragestellung gesucht wird, wird dann erreicht, wenn die Ankerkette straff gespannt ist. Außerdem muss die Ankerkette vollständig abgerollt werden, dieser Satz steht sogar explizit im Text. Zudem muss man annehmen, dass der Anker nicht aus dem Meeresgrund herausgerissen wird, da sonst die Entfernung zum Ankerplatz sehr groß werden könnte und der Anker zudem seine Funktion, das Boot zu fixieren, nicht erfüllen würde. Die Auswahl der richtigen Annahmen erfordert zum einen die Teilkompetenz Verstehen, da z.B. die Vorstellung, dass die Ankerkette straff gespannt ist, in einer angemessenen mentalen Repräsentation der Realsituation berücksichtigt sein sollte. Zum anderen erfordert die Auswahl der richtigen Annahmen auch die Vereinfachung/Strukturierung, da dabei relevante von irrelevanten Angaben (wie 2 km Entfernung) getrennt werden.

Die Aufgabe wird so kodiert, dass bei jeder der fünf Annahmen, die zur Auswahl standen, jeweils erfasst wird, ob die Annahmen angekreuzt wurde (Code 1) oder nicht (Code 0). Daher werden bei der Aufgabe „Anker“ fünf Codes vergeben. Die Code Kombination „10101“ entspricht dann der richtigen Lösung, in der genau die drei relevanten Annahmen ausgewählt wurden und keine der beiden irrelevanten. Die Vergabe von Codes ermöglicht es, bei Bedarf detailliertere Auswertungen zu machen und beispielsweise zu ermitteln, wie viele Lernende fälschlicherweise die zweite Annahme ausgewählt haben.

Die Aufgabe wird dann so bewertet, dass die richtige Lösung die höchste Stufe darstellt und einen Punkt erhält (genau die Annahmen 1, 3 und 5 sind angekreuzt und keine weiteren). Auch eine teilrichtige Lösung, bei der nur zwei der drei wichtigen Annahmen angekreuzt wurden, erhält noch einen Punkt. Alle anderen Lösungen erhalten null Punkte.

Dies ist ein Vorabdruck des folgenden Beitrages: Böckmann, M., & Schukajlow, S. (2020). Bewertung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren und ihre Relevanz für das mathematische Modellieren. In G. Greefrath, & K. Maaß (Eds.), Modellierungskompetenzen – Beurteilung und Bewertung (pp. 113-131). Wiesbaden u. a.: Springer., vervielfältigt mit Genehmigung von Springer. Die finale authentifizierte Version ist online verfügbar unter: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9_6)

### 1.3.3 Zeichnen einer Skizze

Um die Fähigkeit zu überprüfen, wie gut gegebene Informationen vereinfacht/strukturiert werden können, kann die Aufforderung eine Skizze zu zeichnen eingesetzt werden. Dabei wird auch die Teilkompetenz Verstehen miterhoben, da diese eine Voraussetzung darstellt, um eine gegebene Situation angemessen zu skizzieren. Das Zeichnen einer Skizze ist demnach ein dritter Indikator für die Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren. Bevor eine Skizze gezeichnet werden kann, müssen relevante Objekte ausgewählt werden, die in der Skizze berücksichtigt werden sollen. Eine von vier Beispielaufgaben ist in Abbildung 1.6 dargestellt. **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** zu

#### Aufgabe Zirkel

Thomas hat sich für 11,99 Euro einen neuen Zirkel gekauft. Den Zirkel kann man durch Drehen des Rädchens in der Mitte verstellen (siehe Bild). Dabei kann der Winkel zwischen den Schenkeln zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  groß sein. Ein Schenkel des Zirkels ist 11 cm lang.



Welchen Radius hat der größtmögliche Kreis, den man mit diesem Zirkel zeichnen kann?

Löse die Aufgabe nicht komplett. Zeichne nur eine Skizze und beschrifte sie. sehen.

#### Abb.1.6 Aufgabe Zirkel

Die relevanten Informationen zur Beantwortung der Frage sind, dass ein Schenkel des Zirkels 11 cm lang ist und dass der maximale Winkel, den man einstellen kann,  $90^\circ$  beträgt. Diese Angaben müssen in einer Skizze strukturiert werden. Dabei bilden die beiden Schenkel des Zirkels zusammen mit dem Radius des Kreises, der beim Zeichnen entsteht, ein rechtwinkliges Dreieck.

Jede Skizze wird mit null oder einem Punkt bewertet. Wenn die Skizze die Realsituation falsch darstellt, werden 0 Punkte vergeben. Die Realsituation ist falsch dargestellt, wenn die Skizze zu einer falschen Lösung der Aufgabe führt. Dies lässt sich z.B. daran erkennen, dass relevante Informationen in der Skizze falsch angeordnet sind (siehe Beispiel a) in Tab. 1.1). Ebenfalls null Punkte werden vergeben, wenn nicht erkennbar ist, wie mit der Skizze die Aufgabe gelöst werden soll. Die Skizze b) in Tab. 1.1 hilft nicht, die gesuchte Größe zu bestimmen. In diesem Fall wurde von einem Lernenden ein nicht zielführendes Situations- und Realmodell konstruiert. Die Skizze lässt auf die Probleme beim Verstehen, Vereinfachen und Strukturieren schließen. Auch bei fehlender Beschriftung wird die Skizze mit null Punkten bewertet, da dann nicht erkennbar ist, ob die relevanten Informationen richtig strukturiert worden sind (siehe Beispiel c) in Tab. 1.1).

Beispiele aus dem Kodierleitfaden sind in Tab. 1.1 dargestellt.

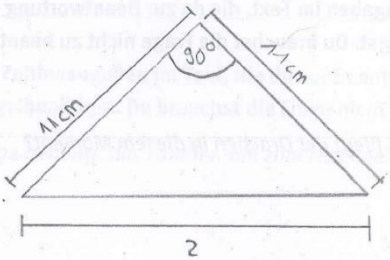
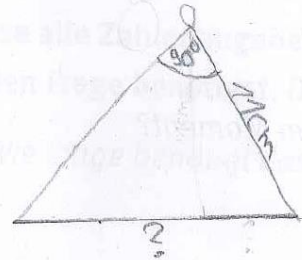
Tab. 1.1 Beispiele für Schülerskizzen zur Aufgabe Zirkel, die mit null Punkten bewertet wurden

<p>a) Falsche Anordnung relevanter Informationen (z.B. Beschriftung der Hypotenuse oder der gesuchten Länge).</p>	<p>b) Kein Modell zur Lösung der Aufgabe erkennbar. (Es ist nicht erkennbar, wie die gesuchte Länge berechnet werden kann.)</p>	<p>c) Die Beschriftung fehlt, daher ist nicht erkennbar, ob die relevanten Zahlen richtig strukturiert wurden.</p>

Wenn die Skizze die Situation richtig veranschaulicht und ein rechtwinkliges Dreieck erkennbar ist, wird 1 Punkt vergeben. Dabei müssen mindestens zwei Seiten des Dreiecks richtig beschriftet sein. Zwei

Dies ist ein Vorabdruck des folgenden Beitrages: Böckmann, M., & Schukajlow, S. (2020). Bewertung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren und ihre Relevanz für das mathematische Modellieren. In G. Greefrath, & K. Maaß (Eds.), Modellierungskompetenzen – Beurteilung und Bewertung (pp. 113-131). Wiesbaden u. a.: Springer., vervielfältigt mit Genehmigung von Springer. Die finale authentifizierte Version ist online verfügbar unter: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9_6)  
Beispiele sind in • Tab. 1.2 abgebildet:

**Tab. 1.2** Beispiele für Schülerskizzen zur Aufgabe Zirkel, die mit einem Punkt bewertet wurden

	
<p>Die Skizze veranschaulicht die Situation angemessen und die Beschriftung ist vollständig und korrekt.</p>	<p>Die Skizze veranschaulicht die Situation angemessen und zwei Seiten des Dreiecks sind beschriftet.</p>


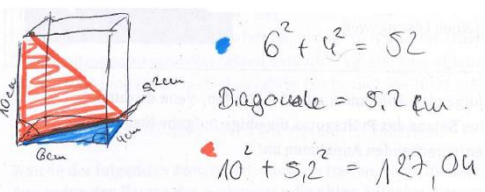
Die Erfassung des Realmodells mithilfe von Skizzen hat wie jede Erfassungsmethode ihre Grenzen. Das Zeichnen einer Skizze ist insbesondere für solche Aufgaben geeignet, in der eine räumliche Einordnung von Objekten eine wichtige Rolle spielt. Zudem setzt diese Methode voraus, dass Lernende wissen, welche Merkmale eine gute Skizze auszeichnen und gute Skizzen auch erstellen können. Allerdings gibt es erste Hinweise darauf, dass Wissen über Skizzen für die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben zwar wichtig sind, jedoch nicht alle Lernenden über dieses Wissen verfügen (Rellensmann et al. 2017).

### 1.3.4 Gesamtkompetenz Modellieren

Zur Erfassung der Gesamtkompetenz Modellieren werden Aufgaben eingesetzt, die von den Lernenden den kompletten Durchlauf eines Modellierungskreislaufs verlangen. Bei Aufgaben, die die Gesamtkompetenz Modellieren erfordern, können entweder Teilpunkte für einzelne Teilkompetenzen vergeben werden, oder es wird lediglich zwischen richtigen und falschen Lösungen unterschieden. Eine Beispielaufgabe, mit der die Gesamtkompetenz erfasst werden kann, ist die Aufgabe Trinkpäckchen (siehe • Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.). Die Schülerlösungen werden wie folgt bewertet: Zunächst wird überprüft, ob mit einem geeigneten mathematischen Modell eine Lösung berechnet wurde. In diesem Fall wird 1 Punkt vergeben, auch wenn Rechenfehler vorhanden sind oder wenn keine Antwort formuliert wurde. Null Punkte werden vergeben, wenn die Aufgabe nicht bearbeitet wurde, der Lösungsprozess abgebrochen oder ein ungeeignetes Modell zur Lösung gewählt wurde. Beispiele für beide Kategorien sind in • Tab. 1.3 zu sehen.

Es wird erwartet, dass die Leistungen beim Treffen von Annahmen, Markieren und Zeichnen einer Skizze als Indikatoren für die Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren mit der Leistung bei der Gesamtkompetenz Modellieren zusammenhängen.

**Tab. 1.3** Bewertung der Gesamtkompetenz Modellieren

Null Punkte	
	
<p>Die Aufgabe wurde nicht bearbeitet, abgebrochen oder falsch gelöst.</p>	<p>Das Modell ist falsch, es handelt sich nicht um einen bloßen Rechenfehler.</p>
Ein Punkt	



Dies ist ein Vorabdruck des folgenden Beitrages: Böckmann, M., & Schukajlow, S. (2020). Bewertung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren und ihre Relevanz für das mathematische Modellieren. In G. Greefrath, & K. Maaß (Eds.), Modellierungskompetenzen – Beurteilung und Bewertung (pp. 113-131). Wiesbaden u. a.: Springer., vervielfältigt mit Genehmigung von Springer. Die finale authentifizierte Version ist online verfügbar unter: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9_6)

<p>Das korrekte mathematische Modell wurde aufgestellt, Rechenfehler führen zu einem falschen Ergebnis.</p>	<p>Das korrekte math. Modell wurde aufgestellt, das Ergebnis wurde ggf. in einem Antwortsatz interpretiert und ggf. gerundet.</p>
<p>Zusätzliche Annahme, dass sich das Loch nicht in der Ecke befindet, sondern davor.</p>	

Im folgenden Kapitel werden Ergebnisse aus einer empirischen Studie in Klasse 9 vorgestellt, bei denen die Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren, sowie die Gesamtkompetenz Modellieren erfasst wurden. Dazu wurden die zuvor beschriebenen Aufgaben als Indikatoren verwendet.

## 1.4 Empirische Studie: Lösungshäufigkeiten und Zusammenhänge zwischen Teilkompetenzen und Gesamtkompetenz Modellieren

### 1.4.1 Methode

In einer empirischen Studie wurden bei insgesamt N=136 Lernenden der 9. Jahrgangstufe die beschriebenen Teilkompetenzen und die Gesamtkompetenz Modellieren untersucht. Die Lernenden stammten aus insgesamt sechs Klassen, von denen drei an einem Gymnasium und drei an einer Realschule unterrichtet werden. Im Mittel waren die Lernenden 14,92 Jahre alt (SD=0,52) und 56 % waren weiblich.

Es gab vier Aktivitäten (Markieren, Annahmen treffen, Zeichnen einer Skizze und Gesamtmodellieren) zu denen jeweils vier verschiedene Aufgaben gestellt wurden, von denen exemplarisch eine Aufgabe mit entsprechender Bewertung (Codierung) im vorangehenden Kapitel (► Abschn. 1.3) beschrieben wurde. Das Testheft für die Lernenden bestand somit aus 16 Aufgaben, für deren Bearbeitung sie eine Doppelstunde mit 90 Minuten Zeit zur Verfügung hatten.

Zur Überprüfung der Objektivität der Beurteilung bei Skizzenaufgaben und bei der Gesamtkompetenz Modellieren wurde ein Teil der Stichprobe von einem unabhängigen Zweitkodierer nochmals bewertet und die Übereinstimmung zwischen beiden Kodieren ausgerechnet. Für die Aufgabentypen Annahmen treffen und Markieren wurde keine Doppelkodierung durchgeführt, da hier bei der Kodierung keine hochinferente Beurteilung erfolgte, sondern lediglich abgetippt werden musste, welche Kreuze bzw. Zahlen im Text markiert waren. Als Maß für die Übereinstimmung zwischen den beiden Kodieren wurde Cohens Kappa berechnet. Die meisten Kappa-Werte sind über 0,6 bzw. über 0,75 und deuten damit auf eine gute bzw. sehr gute Übereinstimmung hin. Lediglich zwei Werte sind zwischen 0,4 und 0,6 und gelten damit nur als akzeptable Übereinstimmung (Wirtz und Caspar 2002, S. 59).

## 1.4.2 Ergebnisse

Die vier Aufgaben zu einer Aktivität wurden zusammengefasst, indem ein Mittelwert über die einzelnen Punktzahlen gebildet wurde. Dazu wurde zunächst geprüft, ob die Aufgaben eine reliable Skala bilden. Ein Kennwert für diese Überprüfung ist Cronbachs Alpha. Die Reliabilitäten waren mit Alpha-Werten von 0,48 (Skala Markieren), 0,53 (Skala Annahmen), 0,57 (Skala Skizzen dichotom) und 0,69 (Skala Gesamtmodellieren) zum Teil sehr niedrig. Eine Erklärung für die niedrige Reliabilität ist die kleine Anzahl der Items pro Skala. In der folgenden **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** sind die Anteile richtiger Lösungen für die 16 eingesetzten Aufgaben dargestellt.

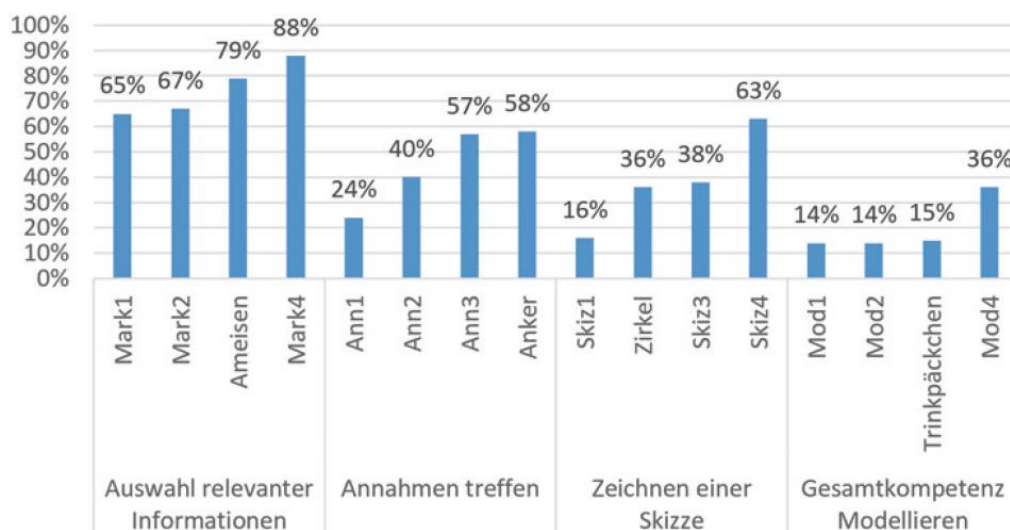
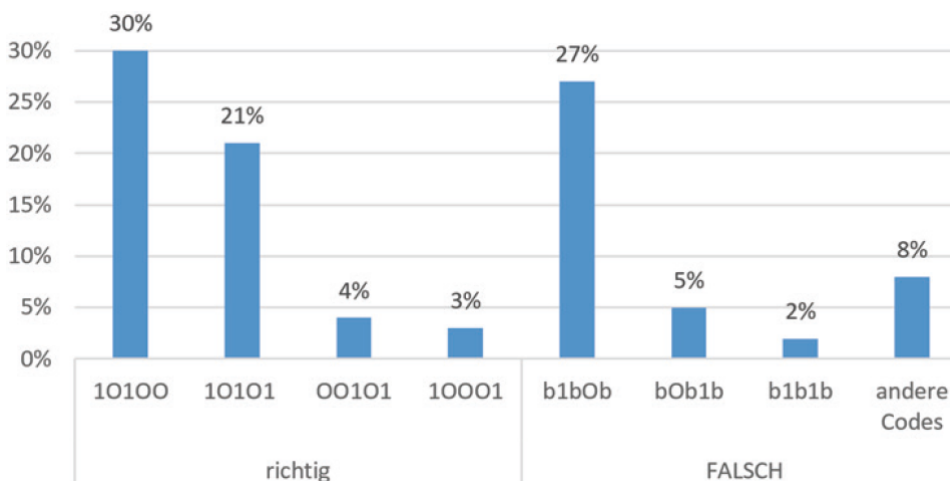


Abb. 1.7 Anteil richtiger Lösungen bei den eingesetzten Aufgaben

Die Aufgaben zur Auswahl relevanter Informationen wurden von 65 bis 88 Prozent der Lernenden richtig gelöst. Dazu zählt die Aufgabe Ameisenstaat (siehe ► Abschn. 1.3.1), bei der 79% der Lernenden genau die relevanten Zahlenangaben im Text markierten. Die Aufgaben zum Treffen von Annahmen wurden von 24 bis 58% der Lernenden richtig gelöst. Als richtige Lösung zählen hier auch solche, bei denen zwei von drei relevanten Annahmen ausgewählt wurden (siehe ► Abschn. 1.3.2). Die Aufgaben, bei denen eine Skizze gezeichnet werden musste, wurden von 16 bis 63 % der Lernenden richtig gelöst. Bei den Aufgaben zur Gesamtkompetenz Modellieren haben 14 bis 36% der Lernenden eine richtige Lösung berechnet. Die detaillierte Erfassung der Codes erlaubt es, bei den fehlerhaften Lösungen genauer zu ermitteln, welche Fehler häufig auftreten oder bei den richtigen Lösungen verschiedene Stufen zu unterscheiden. Exemplarisch ist hier in **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** eine genauere Betrachtung der Schülerlösungen zur Aufgabe Anker, bei der Annahmen getroffen



werden müssen.

Dies ist ein Vorabdruck des folgenden Beitrages: Böckmann, M., & Schukajlow, S. (2020). Bewertung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren und ihre Relevanz für das mathematische Modellieren. In G. Greefrath, & K. Maaß (Eds.), Modellierungskompetenzen – Beurteilung und Bewertung (pp. 113-131). Wiesbaden u. a.: Springer., vervielfältigt mit Genehmigung von Springer. Die finale authentifizierte Version ist online verfügbar unter: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9_6)

**Abb. 1.8** Verteilung der Codes bei der Aufgabe Anker, 1 = Annahme wurde getroffen 0 = Annahme wurde nicht getroffen b = beliebig

Die detailliertere Betrachtung der richtigen Lösungen zeigt, dass nur 21 % alle drei relevanten Annahmen getroffen haben (Code 10101), während z.B. 30 % der Schüler nur die 1. und 3. Annahme getroffen und die 5. vergessen haben (Code 10100). Bei den falschen Lösungen zeigt die Betrachtung der Codes, dass viele Lernende (27 %) die Annahme 2 gewählt haben („Der Ankerplatz ist 2 km von der Ostseeküste entfernt.“, Code b1b0b). Diese Aussage steht zwar im Text, ist aber für die Lösung der Aufgabe irrelevant.

Die Mittelwerte und Standardabweichungen für die vier Skalen sind in • **Tab. 1.4** zu sehen.

<b>Tab. 1.4</b> Mittelwerte und Standardabweichungen für die vier Skalen				
Skala	Auswahl relevanter Informationen	Annahmen treffen	Zeichnen einer Skizze	Gesamtkompetenz Modellieren
M	0,74	0,45	0,38	0,20
SD	0,27	0,31	0,30	0,28
M Mittelwert, SD Standardabweichung				

Der Mittelwerte für die Auswahl relevanter Informationen ist erwartungskonform am höchsten. Der Wert 0,74 bedeutet, dass Lernende im Schnitt bei ungefähr drei von insgesamt vier Aufgaben die relevanten Angaben ausgewählt haben daher drei von vier möglichen Punkten bei der Skala erhalten haben. Das Treffen von Annahmen beinhaltet auch die Auswahl relevanter Informationen und ist daher schwieriger zu lösen, der Mittelwert für die Skala ist mit 0,45 daher geringer als bei der Auswahl relevanter Informationen. Die Skala zum Gesamtmodellieren weist den geringsten Mittelwert auf, da diese Aufgaben seltener richtig gelöst wurden.

Die Korrelationen zwischen den erhobenen Indikatoren für (Teil-)Kompetenzen sind in • **Tab. 1.5** abgebildet. Alle Korrelationen sind signifikant und erwartungsgemäß positiv, eine höhere Leistung bei einem Aufgabentyp geht mit einer höheren Leistung bei den anderen Aufgabentypen und in der Gesamtkompetenz Modellieren einher. Der Zusammenhang zwischen der Fähigkeit, eine Skizze zu zeichnen und der Gesamtkompetenz Modellieren beträgt 0,31 ist nach Cohen (1992, S. 157) mittelgroß, ebenso wie der Zusammenhang zwischen Markieren und dem Zeichnen einer Skizze (0,31). Zwischen der Gesamtkompetenz Modellieren und Annahmen treffen sowie zwischen der Gesamtkompetenz Modellieren und Markieren sind die Zusammenhänge nach Cohen klein (0,26 bzw. 0,23). Zwischen dem Zeichnen einer Skizze und dem Treffen von Annahmen wurde ebenfalls ein kleiner Zusammenhang gefunden ( $r=0,27$ ). Auch der Zusammenhang von  $r=0,20$  zwischen Markieren und dem Treffen von Annahmen ist klein.

<b>Tab. 1.5</b> Korrelationen zwischen den erhobenen Indikatoren für (Teil-)Kompetenzen				
	Gesamtkompetenz Modellieren	Zeichnen einer Skizze	Annahmen treffen	Auswahl relevanter Informationen
Gesamtkompetenz Modellieren	1			
Zeichnen einer Skizze	0,31**	1		
Annahmen treffen	0,26**	0,27**	1	
Auswahl relevanter Informationen	0,23**	0,31**	0,20*	1
* $p < 0,05$ zweiseitig, ** $p < 0,01$				

### 1.4.3 Fazit – Bedeutung für Forschung und Praxis

Der vorliegende Beitrag zeigt, dass es möglich ist, Teilkompetenzen des Modellierens über verschiedene Indikatoren zu erfassen. Die vorgestellten Aufgaben dienen als Beispiel, wie die Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren erfasst werden können. Die Aufgaben können z.B. in Klassenarbeiten zum Einsatz kommen, um Teilkompetenzen des Modellierens zeitökonomisch zu überprüfen. Aufgaben zu Teilkompetenzen helfen zu diagnostizieren, bei welchen Aktivitäten die Lernenden Schwierigkeiten haben. Darauf aufbauend können Fördermaßnahmen entwickelt werden, die helfen können, Modellierungskompetenzen zu vertiefen.

Die gefundenen Zusammenhänge zwischen den Indikatoren für die Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren und der Gesamtkompetenz Modellieren sind klein bis mittelgroß. Die Aufgabentypen zu den Teilkompetenzen hängen also wie erwartet mit der Gesamtkompetenz Modellieren zusammen. Dieser Zusammenhang deutet daraufhin, dass Lernende, die das Verstehen, Vereinfachen und Strukturieren beherrschen, auch beim Bearbeiten von Aufgaben, die den gesamten Modellierungsprozess erfordern, erfolgreicher sind, als Lernende die das nicht können. Zugleich weist die weit von 1 entfernte Korrelation zwischen der Gesamtkompetenz und Teilkompetenzen darauf hin, dass die Messung von Teilkompetenzen allein nicht ausreicht, um Modellierungskompetenzen zu erfassen. Vielmehr müssen für die umfassende Diagnose der Modellierungskompetenzen auch Aufgaben zum Einsatz kommen, die die Gesamtkompetenz erfordern.

Wie die Überprüfung von Modellierungskompetenzen kann auch ihre Vermittlung im Unterricht verschiedenen Ansätzen folgen. Beim sogenannten holistischen oder ganzheitlichen Ansatz werden von Beginn an nur komplette Modellierungsaufgaben gelöst. Beim atomistischen Ansatz hingegen werden zunächst Teilkompetenzen trainiert, bevor ebenfalls komplette Modellierungsaufgaben gelöst werden (Blomhøj und Jensen 2003; Brand 2014, S. 36–39). In beiden Ansätzen erscheinen für den Erwerb der Modellierungskompetenz solche Modellierungsaufgaben entscheidend, die für ihre Bearbeitung das Durchlaufen des gesamten Modellierungsprozesses – ggf. mehrfach – verlangen. In zahlreichen Forschungsprojekten wurde gezeigt, dass Lernende im Unterricht anspruchsvolle Aufgaben bearbeiten können und es evaluierte Lernumgebungen gibt, in denen Modellierungskompetenzen vermittelt und Einstellungen von Lernenden zu Mathematik – einschließlich Emotionen und Motivation – verbessert werden können (Schukajlow und Blum im Druck). Einige Stichworte hierzu sind selbständiges Arbeiten (Blum und Schukajlow im Druck), Unterstützungsinstrument Lösungsplan (Schukajlow et al. 2010), multiple Lösungen (Krug und Schukajlow im Druck), Feedback (Rakoczy et al. 2017), heuristische Lösungsbeispiele (Lindmeier et al. im Druck) und außerschulische Lernorte (Buchholtz und Armbrust im Druck).

Die Aufgaben, die das Zeichnen einer Skizze und damit die Konstruktion des Realmodells erforderten, wurden im Mittel von weniger als der Hälfte der Lernenden richtig gelöst. Dieses Ergebnis zeigt, dass in diesem Bereich noch Übungsbedarf bei den Lernenden besteht. Wenn man im Unterricht mit Lernenden übt, Skizzen zu zeichnen, sollte man Merkmale einer hilfreichen Skizze thematisieren. Dazu zählt z.B., dass die Skizze alle relevanten Objekte enthält und diese richtig angeordnet sind, eine Beschriftung der Skizze mit gegebenen relevanten Informationen und Kennzeichnung der gesuchten Information. Bei der Bewertung können dann Teilpunkte für die einzelnen Kriterien vergeben werden.

Die gefundenen Zusammenhänge zwischen dem Treffen von Annahmen, der Auswahl relevanter Informationen und dem Zeichnen einer Skizze waren in der vorliegenden Studie kleiner, als in anderen Studien. Zwischen dem Treffen von Annahmen und der Gesamtkompetenz wurde hier nur ein kleiner Zusammenhang gefunden, bei Krug und Schukajlow (2012) war der Zusammenhang hingegen groß. Ein Grund könnte die Erfassung sein: Krug und Schukajlow (2012) setzten ein offenes Format ein, bei dem Lernende selbst Annahmen formulieren sollten, hier waren es vorgegebene Annahmen im Multiple Choice Format. Der Vorteil der vorliegenden Erfassung ist, dass die Auswertung zeitökonomisch erfolgen kann und so die wertvolle Zeit im Unterrichtsalltag gespart werden kann. Allerdings stellt das Lesen der Antwortalternativen eine zusätzliche sprachliche Hürde dar. Der gefundene Zusammenhang

Dies ist ein Vorabdruck des folgenden Beitrages: Böckmann, M., & Schukajlow, S. (2020). Bewertung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren und ihre Relevanz für das mathematische Modellieren. In G. Greefrath, & K. Maaß (Eds.), *Modellierungskompetenzen – Beurteilung und Bewertung* (pp. 113-131). Wiesbaden u. a.: Springer., vervielfältigt mit Genehmigung von Springer. Die finale authentifizierte Version ist online verfügbar unter: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9_6)

zwischen der Auswahl relevanter Informationen und der Gesamtkompetenz war ebenfalls klein, während er bei Krug und Schukajlow (2012) und bei Leiss et al. (2010) mittelgroß war. Ein Grund kann die latente Erfassung der Fähigkeiten in den anderen Studien sein, während in der vorliegenden Studie die Fähigkeiten manifest gemessen wurden. Ein weiterer Grund für kleinere Zusammenhänge ist die niedrige Reliabilität von einzelnen Skalen in der vorliegenden Studie.

Um die Reliabilität der Messung zu erhöhen, sollte der Test eine Streuung der Schwierigkeit aufweisen und einzelne Aufgaben sollten ausreichend mit der Gesamtskala korrelieren. Bei der Aufgabe Ameisenstaat beispielsweise ist die Korrelation mit den anderen drei Aufgaben der Skala „Auswahl relevanter Informationen“ gering, wodurch auch die Reliabilität der Skala sinkt. Die geringe Korrelation kann damit zusammenhängen, dass diese Aufgabe für die getestete Population zu leicht war und auch deutlich leichter war als die anderen Aufgaben der Skala. Es empfiehlt sich daher, die vorgestellten Aufgaben und Erfassungsmethoden weiter zu optimieren. Aus messtheoretischen Gründen sollen Tests zur Gesamtkompetenz Modellieren und Aufgaben zu den Teilkompetenzen gleich schwer sein und in ihrer Schwierigkeit variieren. Aus stoffdidaktischen Analysen ist ersichtlich, dass dieser Anspruch schwer eingelöst werden kann. So waren auch in der vorliegenden Studie die Lösungshäufigkeiten der Aufgaben zur Gesamtkompetenz Modellieren viel niedriger als die Lösungshäufigkeit bei Aufgaben, die eine Teilkompetenz erfasst haben. Eine besondere Herausforderung stellt somit die Entwicklung von leichten Modellierungsaufgaben und schweren Aufgaben zu den einzelnen Teilkompetenzen des Modellierens dar, um eine zuverlässige und valide Aussage über die Modellierungskompetenzen von Schülerinnen und Schülern zu treffen.

Der vorliegende Beitrag ist im Rahmen des Projekts TeMo (Textverstehen und Modellieren) an der Universität Münster entstanden. Das Projekt TeMo wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

## Literaturverzeichnis

- Blomhøj, M. & Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications* 22 (3), 123–139.
- Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *Mathematik lehren* (128), 18–21.
- Blum, W. & Schukajlow, S. (im Druck). Selbständiges Lernen mit Modellierungsaufgaben – Untersuchung von Lernumgebungen zum Modellieren im Projekt DISUM. In S. Schukajlow & W. Blum (Hrsg.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren*. Wiesbaden: Springer.
- Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. & Niss, M. (Hrsg.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study*. New York: Springer.
- Brand, S. (2014). *Erwerb von Modellierungskompetenzen. Empirischer Vergleich eines holistischen und eines atomistischen Ansatzes zur Förderung von Modellierungskompetenzen* (Perspektiven der Mathematikdidaktik). Wiesbaden: Spektrum.
- Buchholtz, N. & Armbrust, A. (im Druck). Ein mathematischer Stadtpaziergang zum Satz des Pythagoras als außerschulische Lernumgebung im Mathematikunterricht. In S. Schukajlow & W. Blum (Hrsg.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren*. Wiesbaden: Springer.
- Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin* 112 (1), 155–159.
- Drücke-Noe, C. (2014). *Aufgabenkultur in Klassenarbeiten im Fach Mathematik. Empirische Untersuchungen in neunten und zehnten Klassen* (Perspektiven der Mathematikdidaktik). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.
- Greefrath, G., Siller, H. & Ludwig, M. (2017). Modelling Problems in German Grammar School Leaving Examinations (Abitur) – Theory and Practice. Paper presented at the CERME 10, Dublin.
- Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., Kunter, M. & Baumert, J. (2008).



Dies ist ein Vorabdruck des folgenden Beitrages: Böckmann, M., & Schukajlow, S. (2020). Bewertung der Teilkompetenzen Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren und ihre Relevanz für das mathematische Modellieren. In G. Greefrath, & K. Maaß (Eds.), *Modellierungskompetenzen – Beurteilung und Bewertung* (pp. 113-131). Wiesbaden u. a.: Springer., vervielfältigt mit Genehmigung von Springer. Die finale authentifizierte Version ist online verfügbar unter: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9_6)

- Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik* 29 (2), 83–107.
- KMK. (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003).
- Krug, A. & Schukajlow, S. (im Druck). Multiple Lösungen beim mathematischen Modellieren - Konzeption und Evaluation einer Lernumgebung. In S. Schukajlow & W. Blum (Hrsg.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren*. Wiesbaden: Springer.
- Krug, A. & Schukajlow, S. (2012). Offene Aufgaben: Schülereinstellungen und Teilaktivitäten beim Modellieren. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 481–484). Münster: WTM.
- Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R. & Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling—Task Analyses, Student Competencies, and Teacher Interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik* 31(1), 119–141.
- Lindmeier, A., Ufer, S. & Reiss, K. (im Druck). Modellieren lernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. Interventionen zum selbstständigkeitsorientierten Erwerb von Modellierungskompetenzen. In S. Schukajlow & W. Blum (Hrsg.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren*. Wiesbaden: Springer.
- Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik* 31(2), 285–311.
- Rakoczy, K., Klieme, E., Leiß, Dominik & Blum, W. (2017). Formative Assessment in Mathematics Instruction: Theoretical Considerations and Empirical Results of the Co<sup>2</sup>Ca Project. In D. Leutner, J. Fleischer, J. Grünkorn & E. Klieme (Hrsg.), *Competence assessment in education. Research, models and instruments* (S. 447–467). Cham: Springer International Publishing.
- Rellensmann, J., Schukajlow, S. & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics* 95 (1), 53–78.
- Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 6). Münster: Waxmann.
- Schukajlow, S. & Blum, W. (Hrsg.). (im Druck). *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren*. Wiesbaden: Springer.
- Schukajlow, S. & Leiss, D. (2011). Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. *Journal für Mathematik-Didaktik* 32 (1), 53–77.
- Schukajlow, S., Krämer, J., Blum, W., Besser, M., Brode, R. & Leiss, D. (2010). Lösungsplan in Schülerhand: zusätzliche Hürde oder Schlüssel zum Erfolg? In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 771–774). Münster: WTM.
- van Dijk, T. A. & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension* (1. Aufl.). San Diego: Academic Press.
- Wirtz, M. & Caspar, F. (2002). *Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität. Methoden zur Bestimmung und Verbesserung der Zuverlässigkeit von Einschätzungen mittels Kategoriensystemen und Ratingskalen*. Göttingen: Hogrefe Verl. für Psychologie.
- Zöttl, L., Ufer, S. & Reiss, K. (2010). Modelling with Heuristic Worked Examples in the KOMMA Learning Environment. *Journal für Mathematik-Didaktik* 31(1), 143–165.