Preprint: Haberzettl, N., Klett, S., & Schukajlow, S. (2018). Mathematik rund um die Schule – Modellieren mit Fermi-Aufgaben. In K. Eilerts, & K. Skutella (Eds.), Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5. Ein ISTRON-Band für die Grundschule (pp. 31-41). Wiesbaden: Springer Spektrum.
Finale Fassung: https://link.springer.com/hapter/10.1007/978-3-658-21042-7_3

**Mathematik rund um die Schule – Modellieren mit Fermi-Aufgaben in der Grundschule**

**(Nora Haberzettl, Stephanie Klett, Stanislaw Schukajlow)**

## Abstract:

Sachaufgaben in Schulbüchern der Grundschule sind häufig ausschließlich auf den aktuellen mathematischen Unterrichtsinhalt ausgerichtet, während realitätsnahe Modellierungsaufgaben dort nur selten vorhanden sind. Daher verwundert es nicht, dass Kinder Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben haben. Vor allem offene Modellierungsaufgaben stellen eine Herausforderung dar. Dieser Beitrag soll der Fragestellung nachgehen, inwieweit Fermi-Aufgaben dazu beitragen können, die Modellierungskompetenzen von Kindern zu erweitern. Ziel ist es dabei, dass die Kinder erkennen, welche Relevanz die Mathematik zur Lösung von Alltagsproblemen hat. Im Zentrum stehen Fermi-Aufgaben, die für eine dritte Klasse entwickelt und erprobt wurden. Die Dokumentation von Unterrichtssequenzen ermöglicht einen Einblick in die Umsetzung der Modellierungsaufgaben im Unterricht und zeigt exemplarisch, wie die Modellierungskompetenz von Grundschulkindern durch Fermi-Aufgaben erweitert werden kann. Aufgabenlösungen und Schüleräußerungen veranschaulichen den Lernprozess der Kinder.

# 1 Modellierungsaufgaben in der Grundschule: Theorie und Praxis

Das Sachrechnen nimmt im Mathematikunterricht der Grundschule einen hohen Stellenwert ein. Jedoch kann bezweifelt werden, dass sich alle Lehrpersonen und Lernenden der großen Bedeutung des Sachrechnens bewusst sind. Häufig werden Sachaufgaben so stark auf den aktuellen mathematischen Inhalt ausgerichtet, dass der Sachkontext überflüssig wird. Aufgrund der dadurch meist realitätsfernen Aufgabenstellung ist es nicht verwunderlich, dass die Motivation in Bezug auf Sachaufgaben bei dem Großteil der Grundschulkinder ausbleiben kann.

Werden im Sachrechnen aber Bezüge zur Realität hergestellt und der Fokus damit auf Phänomene aus der Umwelt gerichtet, können diese durch das mathematische Modellieren besser verstanden werden (vgl. Maaß 2009).

Gerade das mathematische Modellieren bietet die Möglichkeit, die Realität mit der Mathematik zu verknüpfen und die Lernenden werden dazu angeregt, ihre Umgebung bewusster zu erleben und kritischer wahrzunehmen (vgl. Franke 2003). Ihnen wird es dadurch möglich, ihr mathematisches Wissen anzuwenden und realistische Probleme zu lösen.

In den Bildungsstandards für das Fach Mathematik in der Grundschule stellt das „*Modellieren*“ oder „*Modellbilden*“ eine der fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen dar. Diese Kompetenz beinhaltet die Entnahme von Informationen aus Sachtexten oder einfachen Darstellungen aus der Lebenswirklichkeit. Weiterhin sollen Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzt, innermathematisch gelöst und wieder auf die Ausgangssituation bezogen werden. Das bereits erwähnte Modell soll im Anschluss daran bewertet werden. Außerdem sollen bei der Modellierungskompetenz zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formuliert werden (vgl. KMK 2004).

## 1.1 Der Modellierungskreislauf

Die unterschiedlichen Anforderungen, die durch Modellierungsaufgaben an die Schülerinnen und Schüler gestellt werden, lassen sich mithilfe eines Modellierungskreislaufes darstellen.

Der Unterschied zwischen verschiedenen Kreisläufen liegt zum Teil in der unterschiedlichen Definition des mathematischen Modellierens. Auf der einen Seite wird nur die Mathematisierung eines realen Problems in Betracht gezogen, auf der anderen Seite wird die gesamte Problemlösesituation in Augenschein genommen. Besonders in der Mathematikdidaktik wird der Begriff des Modellierens für den gesamten Problemlöseprozess verwendet. Die unterschiedlichen Phasen, die ein Kreislauf umfasst, werden nicht starr durchlaufen. Problemlöser wechseln flexibel zwischen verschiedenen Stationen eines Modellierungskreislaufs, wenn sie eine Modellierungsaufgabe bearbeiten (vgl. Leiß 2007).

Innerhalb der Mathematikdidaktik ist der Modellierungskreislauf nach *Blum & Leiß* besonders verbreitet. Er dient der Analyse des Bearbeitungsprozesses von Modellierungsaufgaben und kann speziell Lehrkräfte darin unterstützen, die Probleme ihrer Schülerinnen und Schüler bei der Planung und Durchführung mathematischer Modellierungen besser zu verstehen (vgl. Blum & Leiß 2005).

Am Anfang jedes Modellierungsprozesses steht eine realitätsnahe Situation als Ausgangspunkt (vgl. Henn & Maaß 2003), an die sich sieben Schritte zu Lösung der Situation anschließen.

Der erste Schritt (1) ist das *Konstruieren und Verstehen*. Die Lernenden müssen die Situation verstehen und gegebenenfalls Fragen stellen. Wichtige Informationen werden dem Text entnommen und mit dem Vorwissen verknüpft, wodurch sich eine Vorstellung von der Situation entwickeln soll. Ein Situationsmodell entsteht (vgl. Blum & Leiß 2005). Als nächstes (2) wird durch das *Vereinfachen und Strukturieren* das Ziel verfolgt, das Situationsmodell zu mathematisieren. Dafür werden wichtige Informationen von unwichtigen unterschieden, indem beispielsweise Überlegungen dazu angestellt werden, welche Angaben zum Lösen der Aufgabe benötigt bzw. welche Annahmen getroffen werden müssen. Das Situationsmodell wird in eine Struktur gebracht und vereinfacht, sodass ein Realmodell entsteht. Im dritten Schritt (3) wird durch das *Mathematisieren* das reale Modell in ein mathematisches Modell übersetzt, bevor in der nächsten Phase (4) das *mathematische Arbeiten* beginnen kann. Mithilfe heuristischer Strategien und mathematischer Algorithmen ist hierbei das Ziel, eine mathematische Lösung zu erhalten. Diese Lösung muss im folgenden Schritt (5) durch das *Interpretieren* zurück auf die Realsituation bezogen werden. Nachdem das Ergebnis gedeutet wurde, muss es anschließend (6) durch das *Validieren* auf die Plausibilität geprüft werden. Das Ergebnis wird dabei in Bezug auf den Sachkontext bewertet, reflektiert und anhand von Vergleichswerten validiert. Wichtig ist es, den Modellierungsprozess nicht nach dem Schritt der Interpretation abzubrechen. Hinterfragt man das Ergebnis kritisch, können Lösungen in der Realität als nicht angemessen erscheinen, sodass entweder Teilschritte des Modellierungsprozesses oder der gesamte Modellierungskreislauf wiederholt werden muss. Der letzte Schritt (7) des Modellierungskreislaufs hat vorwiegend eine didaktische Funktion. Die Lernenden werden zum *Darlegen und Erklären* angeregt, indem sie ihre Lösungswege dokumentieren, sie präsentieren und sie für andere nachvollziehbar machen (vgl. Blum 2010, in Weiterentwicklung von Blum & Leiß 2005).

## 1.2 Fermi-Aufgaben

Offenheit, Komplexität, Realitätsbezug und die Lösbarkeit durch das Ausführen eines Modellierungsprozesses sind die wichtigsten Kriterien für Modellierungsaufgaben (vgl. Maaß 2009).

Durch den Umgang mit Modellierungsaufgaben lernen die Kinder, sich mit realistischen Sachsituationen auseinanderzusetzen. Weiterhin erhalten sie ausgehend von ihren individuellen Kompetenzen die Möglichkeit, Fragen zu stellen und nach Lösungen zu suchen. Das Besondere an Modellierungsaufgaben ist die Tatsache, dass sie den Kindern aufzeigen, wie Mathematik im Leben nützlich sein kann (vgl. Maaß 2011).

Fermi-Aufgaben[1] sind offene Sachaufgaben und eine besondere Art von Modellierungsaufgaben (vgl. Maaß 2009), „*die keine oder zumindest unzureichende numerische Informationen enthalten*“ (Hinrichs 2008, S. 148). Fehlende Informationen müssen geschätzt, recherchiert oder durch Alltagswissen ermittelt werden. Die Lernenden werden dazu angeregt, Methoden zur Datenerhebung in Form von Messen, Recherchieren oder Fragen stellen, zu nutzen. Weiterhin fordern Fermi-Aufgaben keine exakte, aber eine gut begründete Lösung. Die Lösungswege entwickeln und vollziehen die Lernenden selbst. Das Ergebnis wird weder als falsch noch als richtig deklariert, sondern als realistisch oder nicht realistisch eingeschätzt.

[1] Der italienische Kernphysiker *Enrico Fermi* war bekannt für seine guten Abschätzungen, die auf einfache und schnelle Weise erfolgten. Es war ihm stets ein Bedürfnis, dass Studierende ebenfalls in der Lage waren, möglichst einfach Abschätzungen vornehmen zu können. Eine seiner bekanntesten Fragen ist „Wie viel Klavierstimmer gibt es in Chicago?“. Zur Lösung müssen Schätzungen über die Anzahl der Einwohner, über die Anzahl der Klaviere und darüber, wie oft ein Klavier gestimmt werden muss, getroffen werden (vgl. Hinrichs 2008).

### 1.3 Kompetenzentwicklung durch Fermi-Aufgaben

Mit Blick auf kompetenzorientierten Unterricht fördern Fermi-Aufgaben verschiedene allgemeine mathematische Kompetenzen und sind in unterschiedlichen Leitideen zu verorten.

Die Schülerinnen und Schüler lernen, ihre *Probleme mathematisch zu lösen*, indem sie beim Bearbeiten geeignete Hilfsfragen formulieren und selbstständig Strategien zum Lösen der Aufgaben entwickeln. Um die fehlenden Informationen zu erhalten, ziehen die Lernenden ihr Alltagswissen heran oder benutzen ihre Stützpunktvorstellungen.

Weiterhin werden besonders das Kommunizieren und mathematische Argumentieren durch das Lesen der Aufgabe und durch den Austausch in Kleingruppen gefördert. Die Lernenden werden dazu angeregt, ihre Lösungen zu notieren sowie mündlich zu erläutern. Dabei begründen sie, wie sie vorgegangen sind. Den Mitschülerinnen und Mitschülern ermöglicht dies, die Lösungswege anderer nachzuvollziehen, mit den eigenen zu vergleichen und darüber zu reflektieren.

Die Kompetenz des *Darstellens* erweitern die Lernenden, indem sie ihren Lösungsweg zunächst für sich notieren und die Rechenschritte anschließend so dokumentieren, dass diese bei der Präsentation für alle nachvollziehbar sind (vgl. Hinrichs 2008).

Beim Lösen von Fermi-Aufgaben ist es von großer Bedeutung, dass die Lernenden mit einfachen Mitteln zum Ergebnis kommen. Dafür greifen sie auf vergangene, bereits bekannte Inhalte zurück und verknüpfen diese mit ihren bereits erworbenen, allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Damit erweitern sie ihren *Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen*, was eine weitere wichtige mathematische Kompetenz darstellt (vgl. Hinrichs 2008).

Jedoch werden nicht nur allgemeine mathematische Kompetenzen bei der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben angesprochen, sondern auch inhaltliche mathematische Kompetenzen gefördert. Da es bei den meisten Modellierungsaufgaben um Zahldarstellungen und das Anwenden von Rechenoperationen geht, wird die Leitidee *Zahlen und Operationen* berücksichtigt. Hinzu kommt die Leitidee *Größen und Messen*, denn häufig werden Größen miteinander verglichen, es wird gemessen oder geschätzt. Sobald der Umgang mit Körpern und Formen oder Flächeninhalten oder das Lesen von Karten notwendig ist, wird die Leitidee *Raum und Form* angesprochen. Entnehmen die Lernenden Daten aus

Tabellen oder erstellen sie Schaubilder, rückt die Leitidee *Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten* ins Zentrum (vgl. Maaß 2009).

# 2 Konzeption einer Unterrichtseinheit

Um den Blick auf realitätsnahe Sachaufgaben und das damit verbundene Modellieren zu richten, verfolgt dieser Beitrag die Fragestellung, inwieweit Fermi-Aufgaben dazu beitragen können, die Modellierungskompetenzen von Kindern im 3. Schuljahr zu erweitern.

Die im Folgenden dargestellte Unterrichtseinheit wurde für eine dritte Klasse konzipiert. Alle Aufgaben wurden mit Schülerinnen und Schülern erprobt und im Anschluss an die Durchführung evaluiert.

## 2.1 Methodische Überlegungen

Zur Bearbeitung der entwickelten Fermi-Aufgaben (siehe 2.3) wurde die „*Ich-Du-Wir-Methode*“ ausgewählt, da diese vielfältige Kommunikationsanlässe bietet (vgl. Hülse & Neubert 2015). Die Lehrkraft nimmt die Position des zurückhaltenden Beobachters ein, steht den Lernenden beratend zur Seite und gibt ihnen genug Freiraum, ihre eigenen Lösungswege und gegebenenfalls auch Umwege zu gehen.

Der Unterricht wird in drei Phasen eingeteilt. In der ersten Phase findet eine Einzelarbeit statt, in der sich jedes Kind alleine mit der Aufgabenstellung auseinandersetzt. Im Anschluss daran erfolgt eine Austauschphase zu zweit oder zu dritt. Die Einzelüberlegungen werden vorgestellt und gemeinsam diskutiert. Aufgrund der unterschiedlich benötigten Zeit und der verschiedenen Lösungswege ist es wichtig, dass der Unterricht offen gestaltet ist und dies ermöglicht (vgl. Habicht 2012). Zur Vorbereitung der Ergebnissicherung ist es beispielsweise möglich, dass in dieser Phase ein Plakat angefertigt wird. Dabei soll der Inhalt im Vordergrund stehen. Den Lernenden soll das Bewusstsein vermittelt werden, dass Fehler zum Arbeitsprozess dazugehören (vgl. Maaß 2009).

Die letzte der drei Phasen bietet den Gruppen die Gelegenheit, ihre Ergebnisse im Plenum zu präsentieren (vgl. Mattes 2011). Wenn die verschiedenen Gruppen die Fermi-Aufgabe unterschiedlich gelöst haben, können die verschiedenen Lösungen zur Diskussion genutzt werden, wodurch die Kompetenz des Kommunizierens und Argumentierens positiv beeinflusst werden können (vgl. Maaß 2009).

## 2.2 Organisatorische Überlegungen

In der Unterrichtseinheit wird jede Aufgabe durch einen Brief der Eule *Fermine* eingeleitet, die dazu jeweils in der Mitte des Sitzkreises der Klasse sitzt (vgl. Hülse & Neubert 2015). Im Anschluss an das Vorlesen des Briefes werden die einzelnen Schritte des Modellierungsprozesses der Reihe nach von den Kindern durchlaufen:

| Teilschritte der Kinder | Teilkompetenz des Modellierens |
|---|---|
| Was will ich herausfinden? | Konstruieren/ Verstehen |
| Welche Angaben brauche ich zum Lösen? | Vereinfachen/ Strukturieren und Mathematisieren |
| Ich berechne die Aufgabe. | Mathematisieren und Mathematisch arbeiten |
| Was bedeutet mein Ergebnis? | Interpretieren |
| Kann meine Lösung stimmen? | Validieren |
| Ich erkläre meinem Partner, wie ich gerechnet habe und warum. | Darlegen und Erklären |
| Wir besprechen unsere Ergebnisse. | |

## 2.3 Aufbau der Unterrichtseinheit

Die Unterrichtseinheit wird folgendermaßen aufgebaut:[2]

| Sequenz | Fermi-Aufgaben |
|---|---|
| 1 | In wie viele Apfelspalten kann man einen Apfel schneiden? (siehe 3.1) |
| 2 | Putzt du länger als eine Stunde in der Woche deine Zähne? Wenn ja, wie lange? |
| 3 | Wie viele Brezeln muss man für den Frühstücksbasar in der Schule kaufen? (siehe 3.2) |
| 4 | Wie viele Seiten werden bei unserer Lesenacht gelesen? |
| 5 | Wie viele Gäste können bei der Afrika-Aufführung sitzen? Wie viele müssen stehen? (siehe 3.3) |
| 6 | Wie viele Schokoküsse muss Frau Mayer für die Geburtstagsfeier ihres Sohns kaufen? |
| 7 | Wie viele Kinder müssen eine Kette bilden, damit sie das Fußballfeld unserer Schule einzäunen können? |
| 8 | Wie viele Brotdosen benutzt unsere Klasse in einer Schulwoche? (siehe 3.4) |

[2] siehe u.a. Hülse und Neubert (2015), Maaß (2009), Müller-Heise (2012).

Jede Fermi-Aufgabe wird in einer Doppelstunde im Fach Mathematik bearbeitet. Ein zweiseitiges Arbeitsblatt zu jeder Aufgabe dient der Dokumentation der Schülerergebnisse. Die Aufgaben werden anschließend auf der Metaebene mit den Kindern reflektiert.

# 3 Dokumentation ausgewählter Unterrichtssequenzen

Die folgende Dokumentation von vier Unterrichtssequenzen stellt exemplarisch die Umsetzung der Modellierungsaufgaben im Unterricht dar. Dabei liegt der Fokus auf der Erweiterung der Modellierungskompetenz der Kinder des 3. Schuljahres, in dem die Unterrichtseinheit durchgeführt wurde.

Die erste ausgewählte Unterrichtssequenz bezieht sich auf den Einstieg in die Unterrichtseinheit. Die weiteren Stunden wurden ausgewählt, um den Prozess der Weiterentwicklung der Modellierungskompetenz zu verdeutlichen.

## 3.1 Aufgabe: Apfel in Teile zerschneiden

Die Unterrichtseinheit wurde mit der Aufgabe eingeleitet: *„In wie viele Spalten kann man einen Apfel schneiden?“* (Sequenz 1).

Den Kindern war schnell klar, dass sich diese Art der Aufgabe von denen unterscheidet, die sie bisher als Sachaufgabe im Mathematikunterricht kennengelernt haben. Auf die Frage der Lehrkraft, wie man diese Aufgabe lösen könnte, hatte eine Schülerin die Idee, dass man es an einem richtigen Apfel ausprobieren könnte.

Für jedes Kind standen ein Apfel, ein Schneidebrett und ein Messer zur Verfügung, sodass jeder Lernende die Aufgabe handlungsorientiert lösen konnte. Die Kinder waren sehr motiviert, wobei die Bearbeitungszeit sehr unterschiedlich war. Wichtig war, dass alle Kinder auf einem Zettel notieren mussten, wie viele Apfelstücke sie hergestellt hatten. Auf die Dokumentation der Ergebnisse auf einem Arbeitsblatt wurde in der Einführungsstunde verzichtet. Nachdem die Bearbeitungsphase abgeschlossen war, traf sich die Klasse im Sitzkreis. Alle Kinder hielten gleichzeitig ihre Lösung hoch, sodass alle Lösungen sichtbar wurden. Einige Kinder staunten über die Lösungen der anderen und die Lehrkraft konnte erkennen, dass viele Kinder durch die Menge der Lösungen verunsichert waren. Anschließend fragten die Kinder sofort, welches Kind denn nun die richtige Lösung hätte. Noch bevor die Lehrkraft auf die Frage reagieren konnte, erklärte eine Schülerin, dass alle Lösungen richtig seien. Weiterhin erklärte sie, dass es jedem selbst überlassen ist, wie groß oder klein er die Apfelspalten schneiden würde. Diese Erklärung war für alle Kinder verständlich und zufriedenstellend.

Ergänzend zu der Aussage der Kinder, dass es viele verschiedene richtige Lösungen gibt, stellte die Lehrkraft eine provokante Behauptung auf:

*„Wenn ich sage, dass ich meinen Apfel in 200 Spalten geschnitten habe, wäre das doch eine richtige Lösung.“*

Sofort erklärten die Kinder, dass diese Zahl viel zu hoch sei. Die Lehrkraft erklärte, dass die Angaben, die man für die Lösung der Aufgabe braucht, realistisch sein müssen.

## 3.2 Aufgabe: Brezeln für den Frühstücksbasar

In der dritten Unterrichtssequenz wurde den Kindern die Aufgabe gestellt: *„Wie viele Brezeln muss man für den Frühstücksbasar in der Schule kaufen?“* (Sequenz 3). Einmal pro Woche findet an der Schule ein Frühstücksbasar statt, der jedes Mal von einer anderen Klasse organisiert wird. Alle Schulkinder lieben die Brezeln, die es dort gibt. Jedoch gibt es in der einen Woche zu wenige Brezeln und in der anderen Woche sind zu viele übrig.

Zu Beginn der Stunde wurde der Brief von *Fermine* von einem Schüler vorgelesen. Der erste Arbeitsschritt „*Was will ich herausfinden?*“ wurde von einem Schüler noch einmal in eigenen Worten zusammengefasst (Modellierungskompetenz: *Verstehen*). Der Schritt *“Welche Angaben brauche ich zum Lösen?“* wurde von den Lernenden selbst durchgeführt. Die meisten Kinder fühlten sich aber in der Einzelarbeit noch unsicher und bevorzugten den Austausch mit einem Partner, was von der Lehrkraft begrüßt wurde. Damit wurde das Kommunizieren gefördert. Zu beobachten war, dass die Kinder wenige Annahmen selbst treffen konnten. Sie äußerten, dass sie nicht genau wüssten, was sie aufschreiben sollten. Um in der ersten Phase des Arbeitens keine Misserfolge entstehen zu lassen, wurden mögliche Angaben gemeinsam an der Tafel notiert. Das Finden der notwendigen Angaben war allerdings nur durch gezieltes Nachfragen der Lehrkraft möglich, da den Kindern die Informationen zum Lösen der Aufgabe nicht bewusst waren. Sie ergänzten die fehlenden Vermutungen auf ihrem Arbeitsblatt, sodass alle die gleichen Fragen verschriftlicht hatten (z.B. *„Wie viele Brezeln isst jedes Kind?“*).

Die entsprechende Antwort wurde unterhalb der Frage von jedem Kind selbst notiert (siehe Abb. 1: Schülerlösung 1: oben).

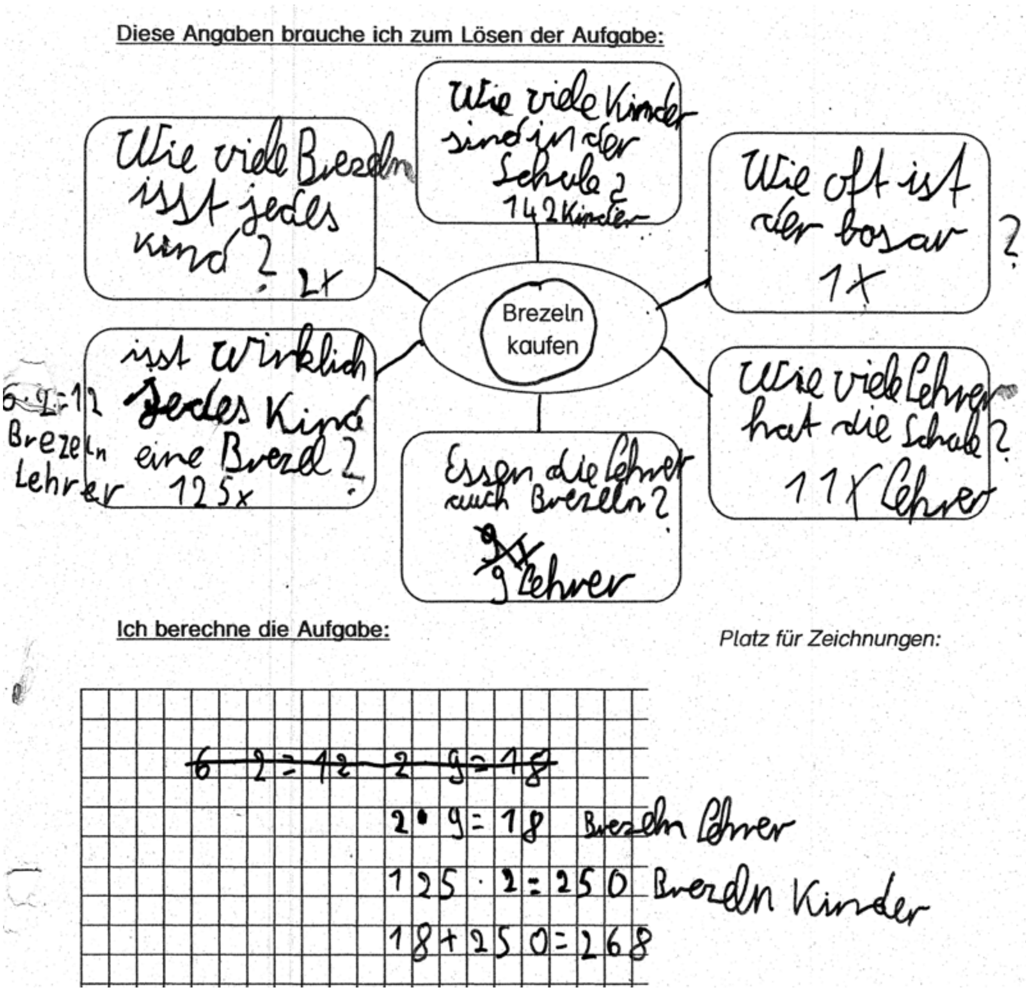


**Abb. 1:** Schülerlösung 1

Anschließend folgte der Schritt *„Ich berechne die Aufgabe“*. Diese Phase war für einen Großteil der Kinder sehr schwierig. Häufig wussten sie nicht, welche Zahlen man zum Rechnen braucht und wie man diese sinnvoll in eine Rechnung einbettet. Einige Kinder addierten und multiplizierten die Zahlen beliebig. Ein Grund für die Schwierigkeiten beim *Vereinfachen, Mathematisieren* und *Mathematisch Arbeiten* könnte die Komplexität der Aufgabe sein. Die Vielzahl an Angaben, die man in seine Rechnung mit einfließen lassen muss, schienen die Kinder zu verunsichern. Kinder, die diese Aufgabe schnell lösen konnten, nahmen im Unterricht eine Helferrolle ein. Sie unterstützten die Kinder mit Schwierigkeiten gemeinsam mit der Lehrkraft.

Als weitere Absprache einigte sich die Klasse zusammen mit der Lehrkraft darauf, dass hinter jeder Teillösung stichpunktartig aufgeschrieben wird, wofür diese steht (siehe Abb. 1: Schülerlösung 1: unten).

Nachdem die Kinder die Aufgabe bearbeitet hatten, folgte die Vorstellung der Ergebnisse an der Tafel von drei Kindern. Sie schrieben ihre Lösungen an und erklärten im Anschluss daran ihr Vorgehen (Modellierungskompetenz: *Darlegen und Erklären*).

Die Lösungen der Kinder waren nachvollziehbar und übersichtlich präsentiert, jedoch bemerkte die Lehrkraft, dass es vielen Kindern schwer fiel, sich in die Lösungswege der anderen hineinzudenken und diese nachzuvollziehen. Sie empfahl daher für die folgenden Präsentationen, dass die präsentierenden Kinder noch einmal ihre im Vorhinein getroffenen Angaben an der Tafel notieren, um den Rechenweg transparenter zu machen.

Das *Interpretieren* des Ergebnisses erfolgte von allen Kindern in der Formulierung eines Antwortsatzes, der keine Schwierigkeit darstellte. Auf die Frage *„Kann mein Ergebnis stimmen?“* (Validieren), antworteten alle sofort mit *„ja“*. Dies vermittelte der Lehrkraft den Eindruck, als wüssten die Schüler nicht genau, was passieren würde, wenn sie ihr Ergebnis nicht für plausibel hielten.

Auffällig war in dieser Unterrichtssequenz insgesamt, dass viele Kinder in der Bearbeitungsphase große Unterstützung brauchten. Die Arbeitsatmosphäre wurde durch das gegenseitige Helfen positiv beeinflusst, sodass am Ende jedes Kind eine Lösung auf seinem Arbeitsblatt notieren konnte.

## 3.3. Aufgabe: Gäste bei der Afrika-Aufführung

Auch die fünfte Aufgabe entstand im Umfeld der Schule. Da am Ende der Afrika-Projektwoche das Erlernte und Hergestellte den Eltern präsentiert werden sollte, lautete die dazu passende Fermi-Aufgabe: *„Wie viele Gäste können bei der Afrika-Aufführung sitzen? Wie viele müssen stehen?“* (Sequenz 5).

Da die Kinder bereits Erfahrungen mit einer Fermi- Aufgabe sammeln konnten, bei der etwas für eine Veranstaltung geplant werden musste (dritte Sequenz), war es denkbar, dass sich die bestehenden Erfahrungen positiv auf den Modellierungsprozess auswirken würden.

Für den Arbeitsschritt *„Welche Angaben brauche ich zum Lösen?“* erhielten die Kinder dieses Mal Zeit, sich erst einmal selbst Gedanken zu machen. Deutlich erkennbar war, dass viele Kinder direkt ein paar Ideen für die benötigten Angaben aufschrieben, wodurch eine Entwicklung in den Teilkompetenzen *Vereinfachen/ Strukturieren* und *Mathematisieren* sichtbar wurde. Mehr als die Hälfte der Kinder wollte selbstständig arbeiten.

Ein weiterer Fortschritt im Umgang mit der Modellierungsaufgabe zeigte sich in der Notation der Angaben. In den vorhergehenden Stunden wurden die Angaben häufig als Frage formuliert, wie z.B. *„Wie viele Schüler hat die Schule?"*. Ohne einen Impuls der Lehrkraft begannen einige Kinder ein paar der Angaben nur noch stichpunktartig zu notieren, wie z.B. *„Anzahl der Kinder der Schule"* (siehe Abb. 2).

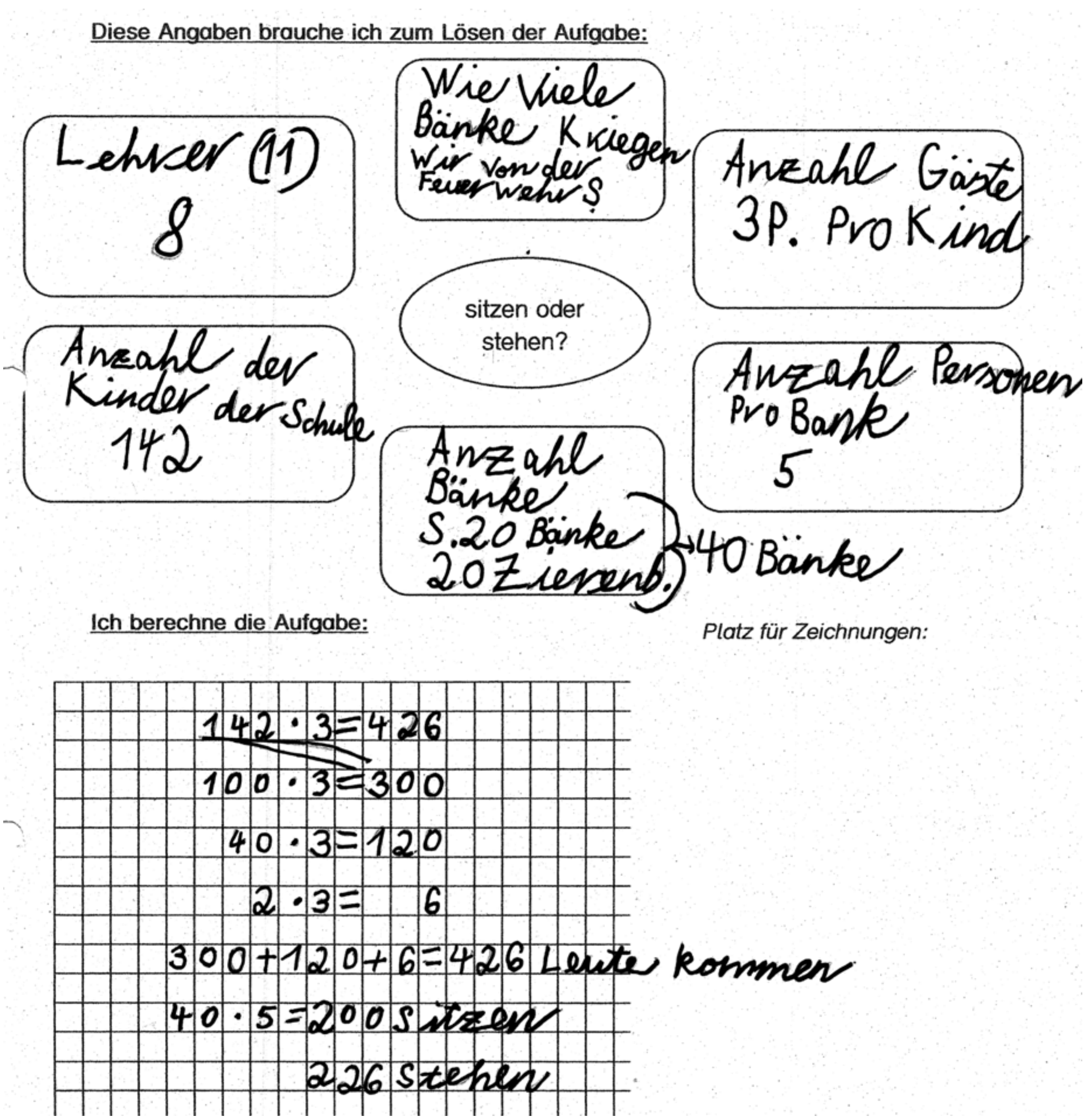


**Abb. 2:** Schülerlösung 2

Überrascht von dieser Veränderung im *Darlegen der Ergebnisse* übernahm die Lehrkraft diese Form der Notation für andere Beispiele. Erkennbar war, dass die kurzen und prägnanten Aussagen den Kindern mehr Übersicht gaben und es ihnen erleichterte, die Angaben besser in ihre Rechnung zu integrieren.

Nachdem die Angaben der Kinder gemeinsam an der Tafel zusammengetragen wurden, wurde klar, dass die Klasse nicht auf jede Frage bzw. Angabe eine Antwort hatte. Angaben wie *„Wie viele Bänke haben wir?“* und *„Wie viele Gäste passen auf eine Bank?“* konnten die Kinder nicht beantworten. Auf den Einwand eines Schülers, dass für die Beantwortung die Schulleitung gefragt werden könnte, ging die gesamte Klasse in das Lehrerzimmer. Ein Schüler erklärte, an welcher Aufgabe die Klasse gerade arbeitete und stellte die erste der beiden Fragen. Für die Beantwortung der zweiten Frage entschieden die Kinder, es an einer Bank selbst auszuprobieren. Die Lernenden baten den Hausmeister um Hilfe und kamen zu dem Ergebnis, dass sechs Kinder darauf sitzen konnten. Dabei berücksichtigten sie lediglich ihre Kindergröße. Da alle Kinder damit zufrieden waren, merkte die Lehrkraft an, dass es meist Erwachsene sein würden, die auf den Bänken sitzen. Diese Aussage brachte die Klasse dazu, ihre Angabe von sechs Personen auf fünf Personen zu korrigieren. Nachdem alle Angaben vollständig waren, konnten die Kinder die Aufgabe berechnen.

Während der Bearbeitung war auffällig, dass ein paar Kinder eine Skizze als Unterstützung zeichneten. Schon in vergangenen Stunden nutzten die Schüler Skizzen oder andere Formen der Darstellung als effektives Hilfsmittel, um den Sachverhalt zu verdeutlichen (siehe Abb. 3 und 4).

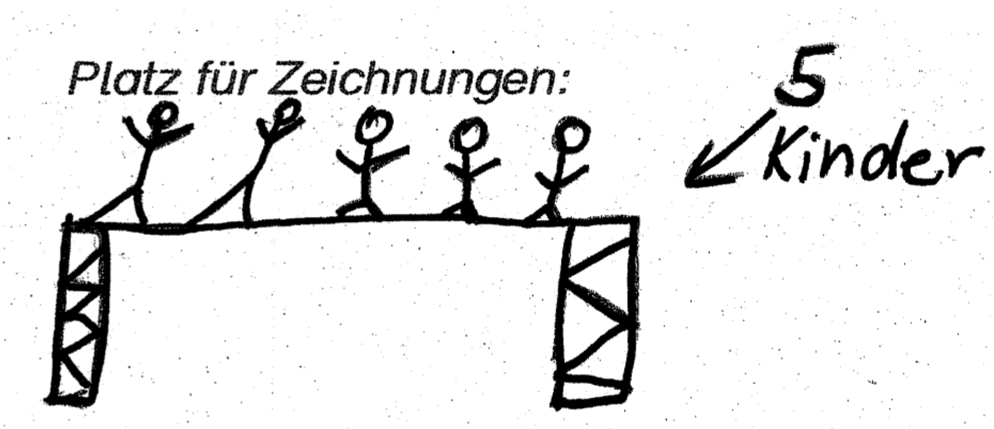


**Abb. 3:** Schülerlösung 3

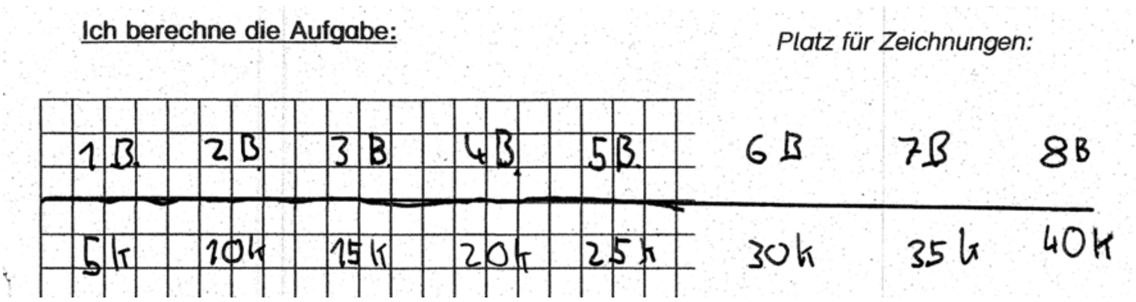


**Abb. 4:** Schülerlösung 4 (B = Bänke; K = Kinder)

Inhaltlich musste die Lehrkraft bei dieser Aufgabe bei weniger Kindern Unterstützung geben. Auffällig war jedoch, dass die Kinder, die Schwierigkeiten mit der Bearbeitung der Aufgaben hatten, häufig nicht wussten, welche Rechenoperation durchgeführt werden muss. Die leistungsstärkeren Kinder, denen die Bearbeitung keine Probleme bereitete, wurden als Helferkinder eingesetzt. Von der Lehrkraft wurden sie für eine unterstützende Hilfe sensibilisiert, ohne dass sie einfach das Ergebnis vorsagten. Das Bewusstmachen der Kinder für eine sinnvolle Unterstützung führte dazu, dass am Ende der Doppelstunde alle Kinder eine Lösung auf dem Blatt notiert hatten. Durch die Beobachtung und kurzen Gespräche der Lehrkraft mit den Kindern, wurde deutlich, dass der Großteil der Klasse, den eigenen Lösungsweg selbstständig herausgefunden und verstanden hat. Festzuhalten ist, dass eine Verbesserung in der Teilkompetenz *Mathematisch arbeiten* zu erkennen war.

Nachdem die Ergebnisse wieder an der Tafel vorgestellt wurden, folgte die Reflexionsphase. In dieser Phase zeigten die Schüleräußerungen, dass sich die Kinder immer sicherer im Umgang mit Fermi-Aufgaben fühlten. Auch der Nutzen der Aufgaben wurde von einem Kind deutlich gemacht, indem es feststellte, dass die Klasse durch das Ausrechnen solcher Situationen beispielsweise die Afrika-Aufführung besser planen könne.

## 3.4 Aufgabe: Brotdosen aller Kinder der Klasse

Diese Unterrichtsstunde war die letzte der Einheit. Die Besonderheit bestand darin, dass das erste Mal eine Aufgabe bearbeitet wurde, die von einer Schülerin formuliert worden war: *„Wie viele Brotdosen benutzt unsere Klasse in einer Schulwoche?“* (Sequenz 8).

Zusätzlich sollten die Kinder in dieser Stunde den gesamten Ablauf zum Lösen der Modellierungsaufgabe selbst durchführen, ohne dass es eine Zwischenphase gab, in der gemeinsam Informationen zusammengetragen wurden. Als die Kinder von der Besonderheit der Stunde erfuhren, waren sie sehr begeistert.

Ob die Kinder Partner- oder Einzelarbeit wählten, war ihnen überlassen. Bis auf zwei Jungen entschieden sich alle Kinder dafür, zunächst alleine zu arbeiten. Während die Lehrkraft die Kinder beobachtete, fiel ihr auf, dass fast alle Kinder die benötigten Angaben wie z.B. *„Anzahl der Schulwochentage“*, *„Anzahl der Kinder in der Klasse“*, *„Anzahl der Brotdosen für jedes Kind“* selbstständig notierten. Das Aufschreiben des Rechenweges wurde von einigen Kindern durch Skizzen ergänzt (siehe Abb. 5).

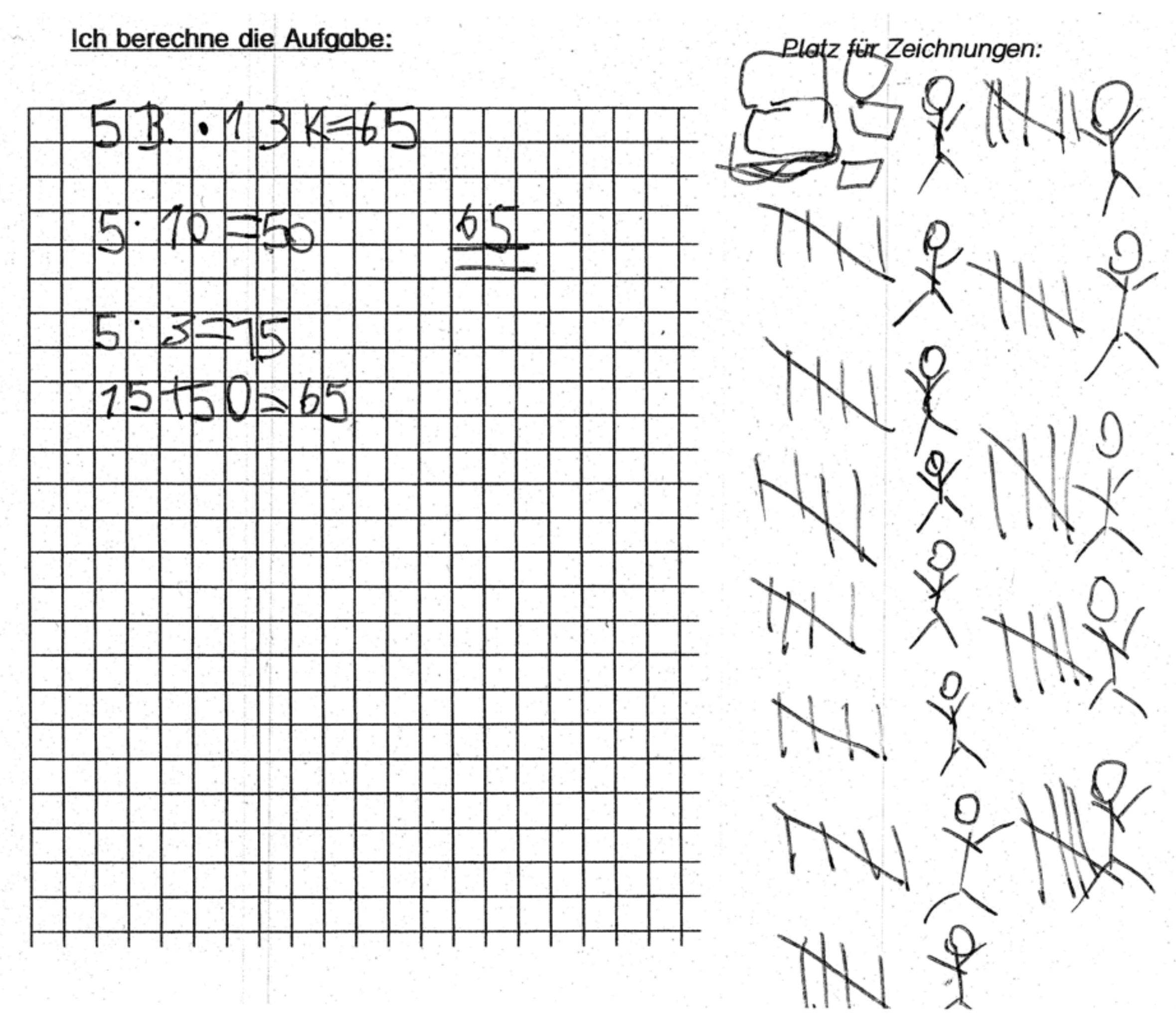


**Abb. 5:** Schülerlösung 5 (B = Brotdose; K = Kind)

Im Vergleich zu den ersten Sequenzen arbeiteten die Lernenden intensiver an der mathematischen Bearbeitung der Aufgabe und der Darstellung ihrer Lösungswege.

Nachdem alle Kinder mit der zu bearbeiteten Aufgabe fertig waren, erklärten vier Kinder ihre Lösungswege an der Tafel. Im Laufe der Zeit wurde deutlich, dass es den Kindern immer besser gelang, ihre Vorgehensweisen so zu erklären, dass alle anderen es verstehen konnten. Zu Beginn jeder Erklärung erläuterten die einzelnen Kinder, von welchen Angaben sie ausgegangen waren. So war es für die Zuhörer leichter, die Gedankengänge nachzuvollziehen. Besonders hervorzuheben ist die Rechnung eines Mädchens, welches während der gesamten Unterrichteinheit starke Probleme mit dem Finden eines geeigneten Rechenwegs hatte. In dieser Stunde hatte sie erstmals den Mut, ihr Ergebnis ihren Mitschülerinnen und Mitschülern zu präsentieren. Ihre Rechnung war in viele Teilrechnungen untergliedert, weil sie Annahmen getroffen hatte, die sonst kein Kind berücksichtigt hatte. Sie ging davon aus, dass von 13 Kindern in einer Schulwoche ein Kind krank ist, ein Kind das Frühstück vergessen hat und ein Kind statt einer Brotdose eine Frühstückstüte dabei hat. Diese Annahmen berücksichtigte sie in ihrer Rechnung und kam zu einem plausiblen Ergebnis. Dieses Mädchen zeigt beispielhaft, wie sich die Kompetenz der Kinder besonders in Bezug auf die Modellierung weiterentwickelt hat.

In der anschließenden Reflexionsphase äußerte sich ein anderes Mädchen und gab den anderen Kindern den Tipp, dass man das Ergebnis gut mit einer Skizze überprüfen könne. Diese Art der Selbstkontrolle hatte das Mädchen bei dieser Aufgabe gewählt und dadurch gemerkt, dass sie richtig gerechnet hatte.

# 4 Fazit

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Beobachtungen und Schülerlösungen auf eine Weiterentwicklung von Teilkompetenzen der Kinder im Modellierungsprozess mithilfe der Fermi-Aufgaben schließen lassen.

Besonders hervorzuheben ist die positive Entwicklung der Teilkompetenzen *Verstehen/Konstruieren*, *Vereinfachen/Strukturieren, Mathematisieren, Mathematisch Arbeiten, Interpretieren* sowie *Darlegen/Erklären*, während das *Validieren* den Kindern nach wie vor noch Schwierigkeiten bereitete.

Die insgesamt positive Entwicklung wurde anhand exemplarischer Schülerlösungen beschrieben. Dabei ist davon auszugehen, dass die Weiterentwicklung nicht bei allen Lernenden der Klasse gleichermaßen erfolgte. Dennoch wurde am Ende der Unterrichtseinheit deutlich, wieviel mehr Selbstvertrauen die Kinder beim Lösen von Fermi-Aufgaben erhalten hatten und wie sich dies auf den Modellierungsprozess und dessen Teilkompetenzen ausgewirkt hat.

Zudem haben die Fermi-Aufgaben dazu beigetragen, den Kindern den Nutzen der Mathematik im Alltag zu verdeutlichen.

## Literatur

Blum, W.: Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer. In: Praxis der Mathematik 52, S. 42-48 (2010)

Blum, W.: Mathematisches Modellieren - zu schwer für Schüler und Lehrer? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Teil I, S. 3-11. Franzbecker, Hildesheim (2007)

Blum, W., Leiß, D.: Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. In: mathematik lehren. H. 128, S. 18-21 (2005)

Franke, M.: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2003)

Habicht, C.: Fermi-Aufgaben bearbeiten. In: Mathematik differenziert 3, S. 24-29 (2012)

Henn, H.-W., Maaß, K.: Standardthemen im realitätsbezogenen Mathematikunterricht. In: Henn, H.-W., Maaß, K. (Hrsg): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Standardthemen-Schriftenreihe der Istrongruppe. Band 8, S. 1-5. Franzbecker, Hildesheim (2003)

Hinrichs, G.: Modellierung im Mathematikunterricht. Spektrum, Heidelberg (2008)

Hülse, J., Neubert, B.: „Putzt du in der Woche mehr als eine Stunde lang deine Zähne?". Förderung des Kommunizierens mit Fermi-Aufgaben. In: Grundschulunterricht Mathematik 2, S. 29-33 (2015)

KMK: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) Beschluss Kultusministerkonferenz, 15.10.2004. (2004)

Leiß, D.: „Hilf mir es selbst zu tun". Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren. Franzbecker, Hildesheim (2007)

Maaß, K.: Mathematikunterricht weiterentwickeln. Cornelsen, Berlin (2009)

Maaß, K.: Mathematisches Modellieren in der Grundschule. In: Sinus an Grundschulen. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen, S. 3-20 (2011)

Mattes, W.: Methoden für den Unterricht. Kompakte Übersichten für Lehrende und Lernende. Schöningh, Paderborn (2011)

Müller-Heise, S.: Wie seid ihr vorgegangen? Wo hattet ihr Probleme? In: Mathematik differenziert 3, S. 33 (2012)