Preprint eines Beitrags: Schukajlow, S., & Krawitz, J. (2020). Ist Lösungsvielfalt lernförderlich? Multiple Lösungen beim Mathematischen Modellieren. *MNU Journal, 73*, 182-187.

Ist Lösungsvielfalt lernförderlich? Multiple Lösungen beim Mathematischen Modellieren

Stanislaw Schukajlow, Janina Krawitz, Universität Münster

Zusammenfassung: Lösungsvielfalt gilt als ein wichtiges Merkmal einer qualitativ hochwertigen Unterrichtsgestaltung. Analysen von empirischen Studien in Mathematik zeigen, dass der Unterricht mit multiplen Lösungen ähnliche Wirkungen auf die Leistungen erzielt wie der traditionelle Unterricht dabei jedoch einzelne Faktoren wie Interesse, Kompetenzerleben und Freude positiv beeinflusst. Lernförderliche Elemente in der Gestaltung des Unterrichts mit multiplen Lösungen werden im Beitrag präsentiert und diskutiert.

1. Einleitung

Die Mathematikstunde in einer achten Klasse ist bald zu Ende. Die Schüler/innen haben eine Modellierungsaufgabe gelöst und unterschiedliche Lösungen erstellt. Lisa fragt ihre Nachbarin: *„Hast du verstanden, was das richtige Ergebnis ist? 25 oder 30 Meter?“*. Lucas meldet sich und fragt die Lehrkraft: *„Soll ich dann bei der Arbeit solche Aufgabe mit der Tabelle lösen oder nach dieser anderen Lösung vorgehen?“*. Jana sagt: *„Jetzt weiß ich, wann ich wie rechnen muss. Gut, dass wir uns den Lösungsweg selbst aussuchen können“* und Jannik meint: *„Das war mir zu viel. Ein Lösungsweg reicht doch!“* Diese unterschiedlichen Rückmeldungen verdeutlichen die Chancen und Risiken, die der Unterricht mit multiplen Lösungen birgt. Die große Vielfalt regt auf der einen Seite zum Nachdenken an, hilft das große Ganze zu verstehen und lässt den Unterrichtsgegenstand unter einer anderen, neuen Perspektive erscheinen. Auf der anderen Seite kann diese Vielfalt schnell zur Überforderung führen und viel Verwirrung unter den Lernenden hervorrufen.

In diesem Beitrag wollen wir die Phänomene der Schüleräußerungen unter wissenschaftlicher Perspektive beleuchten. Die erkenntnisleitenden Fragen sind: Ist der Unterricht mit multiplen Lösungen förderlich für Leistungen, selbständiges Lernen, Metakognition, Motivation und Emotionen? Und welche Prinzipien sollten im Unterricht mit multiplen Lösungen beachtet werden? Diese Fragen werden am Beispiel des Mathematikunterrichts mit Modellierungsaufgaben beantwortet, deren Bearbeitung unterschiedliche Aktivitäten erfordert und die für den Unterricht mit multiplen Lösungen besonders geeignet sind. Hierbei berichten wir über die Ergebnisse des Forschungsprojektes MultiMa (Multiple Lösungen in selbständigkeitsorientierten Mathematikunterrichts, www.schukajlow.de), welches von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell unterstützt wurde (GZ SCHU 2629/1-1/2).

2. Historische und curriculare Perspektive

Die Idee der Multiperspektivität und ihrer Bedeutung für die Weltanschauung und den Erkenntnisgewinn hat ihren historischen Ursprung weit in der Vergangenheit. Dies zeigt sich unter anderem in dem Gleichnis „Die blinden Männer und der Elefant“, das im Buddhismus und anderen Religionen Südostasiens verbreitet ist. Die blinden Männer berühren unterschiedliche Körperteile eines Elefanten und stellen Vermutungen darüber an, um was für einen Gegenstand es sich handelt. Da jede Person jeweils nur ein Körperteil des Elefanten abtastet, erweisen sich all ihre Vermutungen als falsch. Der Raja, der alle Körperteile sehen kann, klärt sie darüber auf, dass es sich um einen Elefanten handelt. In dieser Geschichte wird somit die Idee verwendet, dass die Analyse des Gegenstandes aus verschiedenen Perspektiven notwendig ist, um ein vollständiges Bild eines Phänomens zu bekommen.

Dies ist in der Mathematik, die den Lernenden in der Schule oft als Ansammlung von bereits optimierten Begriffen, Algorithmen und Verfahren erscheint (Neubrand, 2006), mindestens genauso wichtig. Allerdings hat das Auswendiglernen und Üben der Verfahren wenig mit den Tätigkeiten des Beweisens und Problemlösens gemeinsam, die zentrale Aspekte der Mathematik sind. Für den kommutativen Aufbau von mathematischen Kompetenzen und verständnisorientiertem Unterricht ist es notwendig, mehrere Lösungen zu behandeln und auf diese Weise die Vernetzung von sequentiell präparierten Stoff zu erreichen. In den Empfehlungen zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht findet man daher ein Kapitel zu multiplen Lösungswegen (Neubrand, 2006), in dem die Notwendigkeit von multiplen Lösungen für die strukturelle Einsicht auf den Lerngegenstand betont wird und die Bedeutsamkeit multipler Lösungen für die Kompetenzen Problemlösen und Modellieren hervorgehoben wird. In US-amerikanischen Bildungsstandards, die das konzeptuelle Wissen und die prozedurale Flexibilität als wichtige Ziele der mathematischen Grundbildung betonen, wird die Verwendung unterschiedlicher Lösungswegen als Merkmal von Schüler/innen mit fundiertem mathematischen Wissen und Können gesehen (National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010). Die curriculare Verankerung der multiplen Lösungen ist unter anderem auch auf die Bedeutung multipler Lösungen in psychologisch-pädagogischen und fachdidaktischen Lerntheorien zurückzuführen.

3. Multiple Lösungen in Lerntheorien und Modellierungsdiskussionen

Bei Beschreibungen von Prozessen, die beim Problemlösen ausgeführt werden, wird oft auf unterschiedliche Lösungen eingegangen. So werden zum Beispiel bei Wertheimer (1945/1964) verschiedene Lösungsmöglichkeiten bei der Bestimmung des Flächeninhalts eines Parallelogramms thematisiert. Die Beschreibung des Problemraums eines Problems von Newell und Simon (1972) enthält ebenfalls verschiedene Lösungen, die sich auf alle möglichen Zustände des Problems zwischen dem Anfangszustand und dem Endzustand beziehen. Die Wirksamkeit der Auseinandersetzung mit multiplen Lösungen wird insbesondere in theoretischen Konzeptionen wie der Cognitiv Flexibility Theory (CFT) (Spiro, Coulson, Feltovich, & Anderson, 1988) und der Theorie des Cognitive Apprenticeship (CA) (Collins, Brown, & Newman, 1989) begründet. Die CFT beschreibt das Lernen in komplexen Wissensdomänen wie zum Beispiel in der Medizin. Die Autoren unterstreichen die Notwendigkeit, ein Problem aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten, um flexibles, transferfähiges Wissen zu erwerben. Diese Betrachtung zeigt zugleich die Grenzen von multiplen Lösungen, deren Bedeutung mit der Komplexität des Lerngegenstandes und den Anforderungen des Wissenstransfers ansteigt. Möchte man im Unterricht eine Prozedur für einen eng eingegrenzten Aufgabentyp trainieren, ist die Betrachtung verschiedener Lösungsmöglichkeiten nicht hilfreich, sondern unter Umständen sogar hinderlich. Es ist ausreichend, wenn ein einziger Lösungsweg, der bei diesem spezifischen Aufgabentyp hilfreich ist, eingeübt wurde. Bei komplexeren Lerninhalten sieht dies anders aus. Die CFT schlägt vor, den Lerninhalt aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten, um diese Perspektiven (Repräsentationen) zu einer multiplen Repräsentation miteinander zu verknüpfen. In Mathematik kann man zum Beispiel unterschiedliche Repräsentationen einer linearen Funktion (tabellarisch, graphisch, sprachlich und symbolisch) einführen, analysieren, anwenden und vergleichen, um auf diese Weise zu einem umfassenden Verständnis zu kommen. Nach der Theorie des CA wird großer Wert auf kognitive und metakognitive Strategien gelegt, die vom Experten demonstriert und vom Lernenden beobachtet und eingeübt werden sollen. Somit erscheint das Lehren und Lernen von multiplen Lösungen für erfolgreiche Lernprozesse unabdingbar.

Zusammenfassend erwartet man durch die Auseinandersetzung mit multiplen Lösungen folgende Vorteile für die kognitiven und affektiven Bereiche der Lernenden:

- Steigerung der Flexibilität bei der Bearbeitung von Aufgaben (Silver, Ghousseini, Gosen, Charalambous, & Font Strawhun, 2005)
- Stärkere Wissensvernetzung (Levav-Waynberg & Leikin, 2012)
- Tieferes Verständnis des Unterrichtsgegenstandes (Neubrand, 2006) und positive Wirkungen auf konzeptuelles und prozedurales Wissen (Achmetli, Schukajlow, & Rakoczy, 2019)
- Förderung der Metakognition und Selbstregulation (Krug & Schukajlow, 2019)
- Erhöhung der Kreativität von Lernenden (Levav-Waynberg & Leikin, 2012)
- Steigerung von Interesse, Kompetenzerleben (Achmetli & Schukajlow, 2019; Schukajlow & Krug, 2014), Selbstwirksamkeit (Schukajlow, Achmetli, & Rakoczy, 2019) und Freude und Verringerung der Langeweile im Unterricht (Schukajlow & Rakoczy, 2016)

Eine Analyse von theoretischen Überlegungen über die Wirkungen von multiplen Lösungen zeigt die Notwendigkeit der Begriffsklärung. In diesem Beitrag unterscheiden wir drei Kategorien von multiplen Lösungen (Krug & Schukajlow, 2019; Schukajlow & Krug, 2014; Tsamir, Tirosh, Tabach, & Levenson, 2010): (1) multiple Ergebnisse (ME), (2) multiple mathematische Lösungswege (MML) und (3) eine Kombination von ME und MML. Das charakteristische Merkmal der ersten Kategorie der multiplen Lösungen ist die Möglichkeit, unterschiedliche Ergebnisse zu entwickeln, die sich zwar in ihrer Genauigkeit und Plausibilität womöglich unterscheiden, jedoch grundsätzlich als richtige Ergebnisse akzeptiert werden können. ME entstehen bei der Bearbeitung offener Aufgaben, bei denen nicht alle für die Lösung notwendigen Informationen in der Aufgabestellung vorgegeben sind. Die fehlenden Informationen können sich auf die konkreten Zahlenangaben (Krawitz & Schukajlow, 2018) oder auf die zugrundeliegenden mathematischen Modelle beziehen. Letzteres ist der Fall, wenn die Bearbeitung offener Aufgaben unterschiedliche mathematische Modelle erlaubt, wie zum Beispiel die Anwendung von linearen, ganzrationalen oder exponentiellen Funktionen bei Approximationsaufgaben. MML sind in der Mathematik stark verbreitet und unterschiedlich eng definiert und konzeptualisiert. MML umfassen die Verwendung verschiedener Strategien und unterschiedlicher Repräsentationen (z.B. graphische oder symbolische Lösung einer linearen Gleichung) sowie die Ausführung einzelner Lösungsschritte in verschiedener Abfolge, die unterschiedlich effektiv zum Ergebnis der Aufgabenbearbeitung führen können (z.B. zuerst Therme zusammenfassen und dann Ausklammern oder anders herum bei der Gleichung $2(x+1) + 3(x+1) = 10$).

Im Projekt MultiMa wurden in der Sekundarstufe I ME und MML anhand von Modellierungsaufgaben untersucht, da realitätsbezogene Modellierungsaufgaben für Alltag und Beruf von großer Bedeutung sind, die Modellierungskompetenz curricular fest verankert ist (KMK, 2004) und die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben eine Vielzahl an Aktivitäten fördert. Modellieren beinhaltet im Kern Übersetzungsprozesse zwischen Realität und Mathematik. Der Bearbeitungsprozess einer Modellierungsaufgabe erfordert die Konstruktion unterschiedlicher Modelle wie Situationsmodelle, Realmodelle und mathematische Modelle (Blum & Leiss, 2005; Schukajlow, 2011). Typische Modellierungsaktivitäten sind, die Aufgabe zu verstehen, die Gegebenheiten zu idealisieren und zu strukturieren, zu mathematisieren, mathematisch zu arbeiten, mathematische Ergebnisse zu interpretieren, zu validieren und den Lösungsweg zu dokumentieren. ME entstehen dabei durch eine Variation beim Idealisieren, Strukturieren und Vereinfachen (z.B. durch das Treffen unterschiedlicher Annahmen), während MML in der Regel durch eine Variation im mathematischen Arbeiten auftreten.

In der Beispielaufgabe Fachwerkhaus (Abb. 1) sollen Länge und Breite eines Baumstamms im Querschnitt bestimmt werden. Im ersten Schritt muss die Situation verstanden werden: Es handelt sich um einen Baumstamm mit einem Durchmesser von 20 cm im Querschnitt, aus dem ein quaderförmiger Balken gewonnen werden soll. Der Baumstamm wird idealisiert als zylinderförmig betrachtet und der Balken als quaderförmig angenommen. Die Länge und Breite des Balkens im

Querschnitt können entweder als quadratisch oder unterschiedlich groß angenommen werden, sodass man im letzteren Fall eine Annahme über die Länge treffen muss (z.B. 5 cm). Beim Mathematisieren wechselt man von der realitätsbezogenen zu der mathematischen Repräsentation und konstruiert aus dem zylinderförmigen Baumstamm einen Zylinder mit der Grundflächendiagonale von 20 cm. Der Baumstamm wird als Quader mathematisiert. Die dreidimensionalen Repräsentationen (Zylinder bzw. Quader) werden für die Lösung der Aufgabe auf zweidimensionale Repräsentationen (Kreis bzw. Rechteck) vereinfacht. Da die gegebene Diagonale das Rechteck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke teilt, kann man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Länge der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck berechnen. Sind die Länge und Breite des Rechtecks gleich groß, berechnet man:

$$\sqrt{(10\ cm)^2 + (10\ cm)^2} \approx 14{,}14\ cm$$

Das mathematische Ergebnis wird nun im Realkontext interpretiert und sinnvoll gerundet: Die Länge und Breite des Querschnitts des Balkens betragen jeweils etwa 14 cm.
Um das Potential für ME und MML zu illustrieren, analysieren wir noch die anderen Lösungsmöglichkeiten. Ein anderes mathematisches Ergebnis entsteht, wenn man eine andere Annahme trifft und die Länge des Querschnitts des Balkens z.B. auf 5 cm schätzt. Die Breite wird dann wie folgt berechnet:

$$\sqrt{(20\ cm)^2 - (5\ cm)^2} \approx 19{,}36\ cm$$

Nach dem Interpretieren und Runden lautet das mathematische Ergebnis für die Breite des Querschnitts des Balkens etwa 19 cm. Somit entstehen bei der Bearbeitung dieser Aufgabe unterschiedliche Ergebnisse, was typisch für offene Aufgaben ist. Diese Aufgabe kann daher als Aufgabe mit multiplen Lösungsergebnissen (ME) bezeichnet werden.

Fachwerkhaus

In Deutschland gibt es über eine Million Fachwerkhäuser. Links siehst du das tragende Gerüst eines Fachwerkhauses. Dabei verwendet man für die Holzkonstruktion Balken mit rechteckigen Grundflächen. Aus einem Baumstamm wird im Sägewerk immer nur ein Balken hergestellt, um möglichst wenige Holzabfälle zu haben.

Im rechten Bild siehst du einen Baumstamm abgebildet. Wie lang und wie breit kann der Balken maximal im Querschnitt sein, der aus einem Baumstamm mit einer Diagonale von 20 cm hergestellt wird?

Abb. 1: Die Aufgabe „Fachwerkhaus" (Krug & Schukajlow, 2018)

Andere Lösungswege können aber auch zum gleichen Ergebnis führen. Wir betrachten wieder den Fall, bei dem beide Seiten eines Quadrats gleich lang sind. Eine kleine Variation des Lösungswegs wäre, das rechtwinklige Dreieck zu betrachten, dass sich aus der gegebenen Diagonale (Hypotenuse) und der gesuchten Seitenlänge des Quadrats (Katheten) ergibt. Mit diesen Größen wird zunächst eine Gleichung aufgestellt und im Anschluss gelöst:

$$(x\ cm)^2 + (x\ cm)^2 = (20\ cm)^2$$

Die Lösungswege können aber auch deutlich stärker variiert werden. Zum Beispiel kann man zunächst die Summe der Flächeninhalte von vier kongruenten Dreiecken berechnen und dann die Seitenlänge vom Quadrat bestimmen. Ein anderer Lösungsweg ist, eine maßstabsgetreue Konstruktion eines Dreiecks anzufertigen, um so die Länge des Balkens zu bestimmen.

4. Wirkungen multipler Lösungen auf leistungsbezogene Faktoren

Erste empirische Hinweise zur Wirkung von multiplen Lösungen auf die Leistungen von Lernenden kommen aus den internationalen Leistungsvergleichsstudien. In der TIMMS-Videostudie hat man beobachtet, dass Lehrkräfte in Japan Lernende häufiger dazu auffordern, unterschiedliche Lösungswege zu entwickeln, im Klassenraum zu präsentieren und zu diskutieren.

“*Japanese teachers frequently posed mathematics problems that were new for their students and then asked them to develop a solution method on their own. After allowing time to work on the problem, Japanese teachers engaged students in presenting and discussing alternative solution methods and then teachers summarized the mathematical points of the lesson. (…) These features of practice offer an alternative to those seen in the United States and Germany.*” (Hiebert et al., 2003, S. 16)

Zudem lassen Lehrkräfte in Hong Kong und Japan Lernende häufiger als in den USA unterschiedliche Lösungen miteinander vergleichen (Richland, Zur, & Holyoak, 2007). Allerdings sind die kulturellen Unterschiede zwischen den ostasiatischen Staaten und den anderen Ländern groß und Schüler/innen in ostasiatischen Ländern besuchen häufig zusätzlich zu der Regelschule eine Nachmittagsschule, sodass ihre guten Leistungen in Mathematik nicht alleine auf den Unterricht mit multiplen Lösungen zurückgeführt werden können.

Der Einsatz von multiplen Lösungen zeigt sich als Qualitätsmerkmal des Unterrichts von erfolgreichen Lehrkräften und gilt auch allgemein als Merkmal eines guten Unterrichts. Lehrkräfte, deren Schüler/innen gute Leistung erzielen, ermutigen Lernende häufiger, mehrere Lösungen im Unterricht zu entwickeln und lassen diese dann miteinander im Klassenraum vergleichen (Ball, 1993). Die Fähigkeit der Lehrkräfte, unterschiedliche Lösungen zu einer Aufgabe zu entwickeln, ist ein Teil des fachdidaktischen Wissens, welches einen positiven Effekt auf die Mathematikleistungen von Lernenden hat (Baumert et al., 2010).

Die positiven Wirkungen von MML auf Leistungen in Mathematik wurden bisher nur in wenigen methodisch kontrollierten Studien untersucht. In einer dieser Studien wurde Sechstklässlern erklärt, wie man unterschiedliche Typen von lineare Gleichungen bearbeitet (Star & Rittle-Johnson, 2008). Ein Beispiel von zwei unterschiedlichen Lösungswegen zu einem Typ von linearen Gleichungen findet man in Tabelle 1. Eine Gruppe von Schüler/innen hat nur den Lösungsweg 1 und die andere Gruppe beide Lösungswege gelernt.

Typ der linearen Gleichung	Lösungsweg 1 (Standard)	Lösungsweg 2 (Effizient)
a (x + b) = c	3(x + 1) = 15	3(x + 1) = 15

	$3x + 3 = 15$ $3x = 12$ $x = 4$	$x + 1 = 5$ $x = 4$

Tab. 1: Lösungswege beim Bearbeiten von linearen Gleichungen (Star & Rittle-Johnson, 2008)

Nach der Unterrichtseinheit von drei Schulstunden zeigte sich, dass die Behandlung multipler Lösungen keinen positiven Einfluss auf die Leistungen aber einen positiven Einfluss auf die prozedurale Flexibilität hatte. Die beiden Gruppen hatten vergleichbare Leistungen beim Lösen von Transferaufgaben (z.B. $2(3x + 2) + 2x = 20$). Unerwartet hatte die Gruppe, die nur einen Lösungsweg gelernt hat, bessere Ergebnisse bei den Aufgabentypen, die aus dem Unterricht vertraut waren (z.B. $4(x + 3) = 16$). Deutlich besser war die Gruppe, die mehrere Lösungswege gelernt hat, in verschiedenen Facetten der prozeduralen Flexibilität: Sie hatte mehr Wissen über verschiedene Lösungswege erworben, häufiger verschiedene Lösungswege bei der Bearbeitung von Gleichungen verwendet und einen effizienteren Lösungsweg ausgewählt. Ähnliche Ergebnisse zeigte auch eine Untersuchung in Geometrie mit Zehntklässlern mit und ohne mathematischer Begabung. Lernende, die im Unterricht aufgefordert wurden, mehrere Lösungen für eine Aufgabe zu entwickeln, erbrachten zwar vergleichbare Leistungen nach der Unterrichtseinheit, ihr mathematisches Wissen war aber besser vernetzt, sie beherrschten mehrere unterschiedliche Lösungswege und konnten diese adäquat einsetzen (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Die Autoren des Beitrags unterstreichen die positiven Wirkungen, der Aufforderung mehrere Lösungen zu entwickeln, auf die mathematische Kreativität von Lernenden. Die Ergebnisse beider Studien deuten an, dass die Entwicklung multipler Lösungen Vorteile beim Lösen komplexer, unvertrauter Aufgaben bringen kann. Auch die anspruchsvollen Tätigkeiten der Wissensvernetzung und der Flexibilität profitieren, wenn man mehrere Lösungen im Unterricht behandelt.

5. Wie soll man multiple Lösungen unterrichten?

Eine Reihe von Studien beschäftigte sich – unter der Grundannahme, dass die Fähigkeit, multiple Lösungen zu entwickeln, für die mathematische Grundbildung wichtig ist – mit der Frage, wie multiple Lösungen im Unterricht vermittelt werden sollen. Im Fokus der Untersuchungen standen leistungsbezogene Faktoren von Schüler/innen. In einer Untersuchung im Bereich linearer Gleichungen wurde das entdeckende Lernen, bei dem Lernende zuerst eine Lösung entwickelten und anschließend andere Lösungen suchen sollten, mit der Instruktion zu zwei möglichen Lösungen und ihrer Übung verglichen (Star & Rittle-Johnson, 2008). Die Methoden waren vergleichbar in ihrer Wirkung auf die Leistungen, hatten aber verschiedene Wirkungen auf die Flexibilität der Lernenden. Eigenständiges Entdecken der Lösungen wirkte sich positiv auf das Wissen über die multiplen Lösungen und auf die Anzahl multipler Lösungen beim Lösen von Gleichungen aus. Die Instruktion zu mehreren möglichen Lösungen hat dazu geführt, dass Lernende mehr Wissen über wirkungsvolle Lösungen erworben haben und die effizienteren Lösungen (z.B. Lösungsweg 2 in Tab. 1) bei der Bearbeitung der Aufgaben nach der Unterrichtseinheit häufiger genutzt wurden.

In anderen Studien wurde die Rolle der Gegenüberstellung multipler Lösungen bei linearen Gleichungen bei Sechst- und Achtklässlern untersucht und mit der sequentiellen Aufgabenbearbeitung verglichen (Rittle-Johnson & Star, 2007; Rittle-Johnson, Star, & Durkin, 2009). In der einen Gruppe erhielten die Lernenden zwei Beispiele, die die Anwendung zweier Lösungswege zu einer Aufgabe zeigten (Abb. 2), und sollten anschließend die beiden Lösungswege miteinander vergleichen. In der anderen Gruppe erhielten die Lernende nacheinander Beispiele zu ähnlichen Aufgaben, mit der Aufforderung jeweils über die Vor- und Nachteile des Lösungsweges zu reflektieren (Abb. 3).

Mandy's Solution:	**Erica's Solution:**
$5(y+1) = 3(y+1)+8$	$5(y+1) = 3(y+1)+8$
$5y+5 = 3y+3+8$ *Distribute*	$2(y+1) = 8$ *Subtract on Both*
$5y+5 = 3y+11$ *Combine*	$y+1 = 4$ *Divide on Both*
$2y+5 = 11$ *Subtract on Both*	$y = 3$ *Subtract on Both*
$2y = 6$ *Subtract on Both*	
$y = 3$ *Divide on Both*	

1. Mandy and Erica solved the problem differently, but they got the same answer. Why?

2. Why might you choose to use Erica's way?

Abb. 2: Gegenüberstellung von zwei Lösungswegen zu einer Aufgabe

Mandy's Solution:

$$
\begin{aligned}
5(y+1) &= 3(y+1)+8 && \\
5y+5 &= 3y+3+8 && \textit{Distribute} \\
5y+5 &= 3y+11 && \textit{Combine} \\
2y+5 &= 11 && \textit{Subtract on Both} \\
2y &= 6 && \textit{Subtract on Both} \\
y &= 3 && \textit{Divide on Both}
\end{aligned}
$$

1. Would you choose to use Mandy's way to solve problems like this? Why or why not?

-----NEXT PAGE-----

Erica's Solution:

$$
\begin{aligned}
10(x+3) &= 6(x+3)+16 && \\
4(x+3) &= 16 && \textit{Subtract on Both} \\
x+3 &= 4 && \textit{Divide on Both} \\
x &= 1 && \textit{Subtract on Both}
\end{aligned}
$$

1. Check Erica's solution by substituting her answer into the equation. Did Erica get the right answer?

Abb. 3: Sequenzielle Präsentation von zwei Lösungswegen zu zwei ähnlichen Aufgaben

Es zeigte sich, dass beide Unterrichtszugänge zu multiplen Lösungen Vorteile für Lernende mit verschiedenem Vorwissen haben. Bei Achtklässlern, die bereits Vorwissen über Gleichungen besaßen, erwies sich das Gegenüberstellen von Lösungswegen als vorteilhaft. Achtklässler, die die beiden angebotenen Lösungswege verglichen, zeigten höhere Leistungen beim Lösen von Aufgaben und bei der Flexibilität (Erkennen möglicher Umformungen einer Gleichung). Sechstklässler, die noch nicht gelernt hatten, wie man eine Gleichung umformen kann, profitierten stärker von der sequenziellen Präsentation von zwei Lösungswegen. Somit ist der Lernfortschritt bei einer Lösungsmethode vom Vorwissen der Probanden abhängig. Um von einem Vergleich von Lösungen zu profitieren, sollte folglich zunächst das basale Vorwissensniveau von Lernenden gesichert werden.

6. Multiple Lösungen, Metakognition und affektiv-motivationale Merkmale

Man kann den Einfluss der Entwicklung multipler Lösungen auch auf nicht kognitive Merkmale, wie zum Beispiel metakognitive Strategien und Selbstregulation (Krug & Schukajlow, 2019), Kompetenzerleben, Autonomie und Interesse (Schukajlow & Krug, 2014), Selbstwirksamkeit (Schukajlow et al., 2019) und Freude und Langeweile im Unterricht (Schukajlow & Rakoczy, 2016), begründen. An dieser Stelle möchten wir die relevanten Theorien und Wirkmechanismen kurz ansprechen. Ausführliche Erläuterungen liefern die entsprechenden Publikationen.

Das selbstregulierte Lernen ist ein zyklischer Prozess. Die Person setzt eigene Ziele, plant Aktivitäten, die helfen sollen, die Ziele zu erreichen, führt die Aktivitäten aus, kontrolliert die Ausführung der Aktivitäten und das Erreichen der Ziele und reflektiert den Lernprozess (Zimmerman, 2002). Eine wichtige Rolle übernehmen hierbei metakognitive Strategien wie Planung, Kontrolle und Reflexion. Die Entwicklung multipler Lösungen steigert die Möglichkeit, flexibler und adaptiver auf die Anforderung, eine Aufgabe zu bearbeiten, zu reagieren. Dadurch können Lernende ihr Vorgehen besser planen und kontrollieren, um so die Regulation des eigenen Lernens zu verbessern.

Im Rahmen der Selbstbestimmungstheorie der Motivation (Deci & Ryan, 2000) wird angenommen, dass motivationsrelevante Faktoren wie Interesse von den drei Grundbedürfnissen Autonomie, Kompetenzerleben und soziale Eingebundenheit beeinflusst werden. Gelingt es, die drei Grundbedürfnisse im Mathematikunterricht positiv zu beeinflussen, steigt das Interesse von Lernenden an Mathematik. Die Entwicklung multipler Lösungen im Unterricht bietet Lernenden die Möglichkeit, vielfältige Lösungsoptionen kennenzulernen und erhöht dadurch ihre Autonomie im Unterricht. Die Fähigkeit, mehrere Lösungen zu entwickeln, steigert zudem das Kompetenzerleben im Vergleich zu Lernenden, die nur eine Lösung entwickeln können.

Die Selbstwirksamkeit(-serwartung) ist definiert als die Überzeugung, aufgrund der eigenen Fähigkeiten die anstehenden situationsspezifischen Anforderungen bewältigen und die dafür notwendigen Handlungen ausführen zu können (Bandura, 2003). In der Mathematik und den Naturwissenschaften bestehen die Handlungen oft aus einzelnen Schritte beim Bearbeiten eines Problems. Als stärkster Einflussfaktor auf die Selbstwirksamkeit gelten Erfolgserlebnisse der Vergangenheit („mastery experience“)(Butz & Usher, 2015). Bewältigt man erfolgreich eine ungewöhnlich anspruchsvolle Aufgabe und entwickelt mehrere Lösungen im Unterricht, wird die Selbstwirksamkeit im Fach positiv beeinflusst.

In Emotionstheorien (Pekrun, 2006) wird angenommen, dass Emotionen von Lernenden wie Freude und Langeweile im Unterricht von den Einschätzungen der Bedeutsamkeit (Valenz) der Handlungen und der Fähigkeit, die Anforderungen zu bewältigen (Selbstwirksamkeit), beeinflusst werden. Freude entsteht demnach, wenn die Person der Handlung eine hohe Valenz beimisst und eine hohe Selbstwirksamkeit in Bezug auf diese Handlung empfindet. Langeweile wird hervorgerufen, wenn die Person eine niedrige Valenz und hohe oder niedrige Selbstwirksamkeit empfindet. Die Möglichkeit, eigene Lösungen auszuwählen und zu entwickeln, kann die Valenz eigener Aufgabenbearbeitung erhöhen und zudem die Selbstwirksamkeit stärken. Folglich ist zu erwarten, dass die Entwicklung multipler Lösungen eine positive Wirkung auf das Empfinden von Freude hat und dem Empfinden von Langeweile entgegenwirkt.

7. Multiple Lösungen zu Modellierungsaufgaben: Projekt MultiMa

Das MultiMa-Projekt besteht aus zwei Teilprojekten, die sich auf die Taxonomie multipler Lösungen beziehen. Im ersten Teilprojekt wurde die Behandlung multipler Lösungsergebnisse (ME) untersucht, die durch die Annahmen über fehlende Angaben bei offenen Modellierungsaufgaben entstehen (siehe Abb. 1). Im zweiten Teilprojekt wurde der Einfluss der Entwicklung multipler mathematischer Lösungswege (MML) in geschlossenen realitätsbezogenen Aufgaben erforscht (vgl. Abb. 4). Als Unterrichtsmethode wurde der selbständigkeitsorientierte, „operativ-strategische“ Unterricht ausgewählt, der aus dem Wechsel zwischen der individuellen Arbeit und Gruppenarbeit sowie Reflexion im Plenum bestand und deren Wirksamkeit in anderen Untersuchungen bestätigt wurde (Blum & Schukajlow, 2018; Schukajlow, Blum, & Krämer, 2011; Schukajlow et al., 2012). Der

Gruppenarbeit wurde zu Beginn der Unterrichtseinheit eine direktive Instruktionsphase vorangestellt, die von der Lehrkraft stark gesteuert wurde. Die Lehrkraft demonstrierte in der Instruktionsphase an der Tafel unter Mitwirkung der Lernenden, wie Modellierungsaufgaben mit bzw. ohne ML gelöst werden (mehr zu Unterrichtsmethoden, Unterrichtstechnicken, Lernmaterialien und Medien bei ME siehe Krug & Schukajlow, 2018).

Die Analyse von theoretischen und empirischen Befunden lässt folgende Gestaltungsprinzipien des Unterrichts mit multiplen Lösungen ableiten (Schukajlow et al., 2019):

- Einsatz herausfordernder Aufgaben, die die Konstruktion mehrerer Lösungen erlauben
- Aufforderung an jede/r Schüler/in, mehrere eigene Lösungen zu einer Aufgabe zu entwickeln
- Anregen von Diskussionen zwischen den Lernenden über ihre individuellen Lösungen in Kleingruppen und im Plenum
- Ermutigen von Schüler/innen, verschiedene Lösungen miteinander zu vergleichen und zu kontrastieren sowie über die Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Lösungen zu reflektieren

Die Wirksamkeit des Unterrichts mit ME und MML wird anhand der Ergebnisse aus dem MultiMa Projekt in den nächsten beiden Abschnitten analysiert.

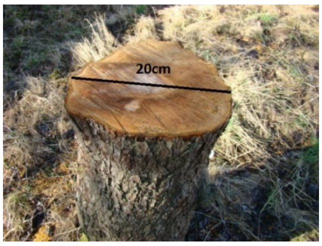
7.1. Wirkungen der Entwicklung multipler Lösungsergebnisse beim Modellieren

Vermutungen über die Wirksamkeit multipler Lösungen stützen sich auf die Annahme, dass Lernende mehrere Lösungen im Unterricht entwickeln. Allerdings ist dies nicht immer der Fall. Angebot-Nutzungs-Modelle des Lernens gehen davon aus, dass Lehrkräfte nur ein Angebot bereitstellen können. Wie gut dieses Angebot genutzt wird, hängt von den situationellen Bedingungen und individuellen Lernvoraussetzungen der Lernenden ab. Für den Unterricht mit multiplen Lösungen bedeutet das, dass die Behandlung multipler Lösungen zu einer Entwicklung mehrerer individueller Lösungen bei vielen Lernenden führt, sodass deren Lernfortschritte entsprechend gesteigert werden. Gelingt es einzelnen Schüler/innen nicht, mehrere Lösungen zu erstellen, können auch keine lernförderlichen Wirkungen der Behandlung multipler Lösungen erwartet werden. Aus der unterrichtspraktischen Perspektive interessiert uns, inwieweit es sich lohnt, multiple Lösungen im Unterricht zu behandeln. Diese Frage wurde im MultiMa Projekt zunächst für die multiplen Ergebnisse beim Modellieren untersucht.

Die ME-Lernumgebung wurde für fünf Unterrichtsstunden konzipiert: eine Einführungsphase (1./2. Unterrichtsstunde), eine Übungsphase (3./4. Unterrichtsstunde) und eine Flexibilisierungsphase (5. Unterrichtsstunde). Das fachliche Ziel der Lernumgebung war, die Modellierungskompetenz von Lernenden zu verbessern. Hierbei wurden Aufgaben eingesetzt, deren Bearbeitung die Bestimmung einer Seite im rechtwinkligen Dreieck erforderte. Im Unterricht mit ME zeigte die Lehrkraft zunächst, wie durch verschiedene Annahmen unterschiedliche Lösungsergebnisse beim Bearbeiten einer offenen Aufgabe entwickelt werden können. Im Anschluss daran wurden die Lernenden dazu aufgefordert, zwei Lösungsergebnisse zu finden (Abb. 4). Im Unterricht mit jeweils einem Lösungsergebnis (EE) wurde derselbe methodische Ablauf angewandt (Abb. 5). Allerdings wurden in dieser Unterrichtsbedingung geschlossene Aufgaben eingesetzt und die Lernenden dazu aufgefordert, eine eigene Lösung zu erstellen.

Fachwerkhaus ME

In Deutschland gibt es über eine Million Fachwerkhäuser. Links siehst du das tragende Gerüst eines Fachwerkhauses. Dabei verwendet man für die Holzkonstruktion Balken mit *rechteckigen* Grundflächen. Aus einem Baumstamm wird im Sägewerk immer nur ein Balken hergestellt, um möglichst wenige Holzabfälle zu haben.



Im rechten Bild siehst du einen Baumstamm abgebildet. Wie lang und wie breit kann der Balken maximal im Querschnitt sein, der aus einem Baumstamm mit einer Diagonale von 20 cm hergestellt wird? *Gib mögliche Maße von zwei verschiedenen Balken an. Schreibe beide Lösungswege auf.*

Fachwerkhaus EE

In Deutschland gibt es über eine Million Fachwerkhäuser. Links siehst du das tragende Gerüst eines Fachwerkhauses. Dabei verwendet man für die Holzkonstruktion Balken mit *quadratischen* Grundflächen. Aus einem Baumstamm wird im Sägewerk immer nur ein Balken hergestellt, um möglichst wenige Holzabfälle zu haben.

Im rechten Bild siehst du einen Baumstamm abgebildet. Wie lang und wie breit kann der Balken maximal im Querschnitt sein, der aus einem Baumstamm mit einer Diagonale von 20 cm hergestellt wird?

Abb. 4: Variationen der Aufgabe „Fachwerkhaus" im Unterricht mit multiplen Ergebnissen und einem Ergebnis (Krug & Schukajlow, 2018). Unterschiede in beiden Aufgabenvariationen sind kursiv hervorgehoben.

An der Untersuchung der Wirkungen von ME nahmen 144 Neuntklässler (43 % weiblich; im Durchschnitt 15 Jahre alt) aus sechs Realschulklassen teil. Die Lernenden jeder Klasse wurden in zwei etwa gleich große Gruppen (ME und EE) unter Berücksichtigung der Leistungen und des Geschlechts eingeteilt, sodass insgesamt 12 Lerngruppen entstanden. Die Lerngruppen wurden von vier Lehrpersonen in separaten Räumen unterrichtet. Jede Lehrkraft unterrichtete die gleiche Anzahl von ME- und EE-Lerngruppen. In der Mathematikstunde unmittelbar vor und nach der Unterrichtseinheit wurden Leistungstests und Befragungen durchgeführt. Die Leistungstests enthielten Modellierungsaufgaben und innermathematischen Aufgaben zum Satz des Pythagoras. Die Befragungen umfassten unter anderem Skalen zum Erfassen von metakognitiven Strategien (Planung und Kontrolle), selbstreguliertem Lernen und Interesse. Während der Unterrichtseinheit – nach der ersten und zweiten Doppelstunde – wurden die Anzahl von entwickelten Lösungen, Kompetenzerleben, Autonomie, Freude und Langeweile erfasst.

Ablaufplan zur Einführungsphase (90 Min. bzw. 1. + 2. Stunde)

Einführung [ca. 10 Min.]

Gruppenorganisation, motivierende Einstimmung

Erläuterung der Inhalte der Unterrichtseinheit. Es werden spezielle Matheaufgaben behandelt, bei denen

- überflüssige Angaben vorhanden sind,
- Angaben fehlen, die man selber schätzen soll, und
- mehrere Lösungen möglich sind.

Lehrperson stellt die Arbeitskarte in allen Schritten mittels eines Overheadprojektors vor. Dabei soll der Wechsel zwischen individuellem Arbeiten und der Gruppenarbeit betont werden.

Einführung von multiplen Lösungen am Beispiel der Aufgabe „Feuerwehr" [40 Min.]

Aufgabe „Feuerwehr" so wie in der Arbeitskarte „Wie ich meine Arbeit planen soll" beschrieben (allein – zusammen – allein) bearbeiten [individuelle Arbeit und Gruppenarbeit] [ca. 25 Min.]. In der Phase der Gruppenarbeit ist als Impuls für die Erstellung der zweiten Lösung, ein Hinweis auf die Position des Fahrzeuges möglich.

Besprechung der Lösungen der Schüler/innen mit Hinblick auf die zweite Lösung. *Dabei soll besonders betont werden, dass es mehrere richtige Antworten gibt. Zudem sollen die multiplen Lösungen diskutiert werden* [Lehrervortrag, rückblickendes L.-Sch.-Gespräch] [ca. 15 Min.].

Bearbeitung der Aufgabe „Sendemast“ [ca. 40 Min.]

Schüler/innen sollen die Aufgabe „Sendemast“ so wie in der Arbeitskarte beschrieben bearbeiten [ca. 25 Min.]

Darstellung mittels eines Overheadprojektors und Reflexion zur Aufgabe „Sendemast“ im Plenum mit dem Hinweis auf die multiplen Lösungen [Lehrermoderation, Schülervortrag] [ca. 15 Min.].

- Bedeutung dieser Aufgaben (wie im realen Leben z.B. Handytarife, optimale Lösung finden) herausstellen.
- Betonen, dass aus verschiedenen Annahmen verschiedene Lösungen resultieren.

In der Diskussion können die folgenden Punkte angesprochen werden: Welche Angaben sind überflüssig? Welche Angaben müssen geschätzt werden? Wie sieht die zweite Lösung aus?

Abb. 5: Ablaufplan der Einführungsphase im MultiMa-Teilprojekt zu multiplen Ergebnissen

Die Analyse der erbrachten Leistungen zeigte, dass die Lerngruppen ME und EE vergleichbare Leistungen beim Modellieren und beim innermathematischen Arbeiten erreichten. Wie erwartet, stellte sich heraus, dass Lernende, die mehrere Lösungen im Unterricht entwickelten, über ein höheres Kompetenzerleben berichteten. Das höhere Kompetenzerleben wiederum hatte einen positiven Einfluss auf ihre Leistungen. Ferner konnten wir positive Effekte der Behandlung ME auf das selbstregulierte Lernen sowie auf die Planung und Kontrolle des Lösungsprozesses nachweisen. Der Vergleich motivationaler Merkmale bestätigte die positiven Wirkungen der Behandlung ME auf die Autonomie im Unterricht, das Interesse an Mathematik und das Empfinden von Freude bei der Bearbeitung der Aufgaben im Unterricht. Allerdings berichteten die Lerngruppen ME und EE ein vergleichbares Niveau an Langeweile. Ein wichtiges Ergebnis war darüber hinaus, dass leistungsstarke und leistungsschwache Lernende gleichermaßen multiple Lösungsergebnisse finden konnten. Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass die Variation der Lösungsergebnisse durch eine Annahme über fehlende Angaben kein besonders hoch ausgeprägtes mathematisches Wissen erfordert. Somit eignet sich diese Unterrichtsgestaltung für Lernende verschiedener Leistungsniveaus.

7.2. Wirkungen der Entwicklung multipler mathematischer Lösungswege beim Modellieren

Im MML-Teilprojekt wurde eine vierstündige Unterrichtseinheit (zwei Doppelstunden) konzipiert, in der Lernende realitätsbezogene Aufgaben mit einem bzw. zwei mathematischen Lösungswegen bearbeiteten. Hierbei wurden geschlossene Aufgaben eingesetzt, die deutlich weniger Modellierungspotential haben als offene Aufgaben (Abb. 6). Dies war notwendig, um die Effekte von MML unabhängig von ME zu untersuchen. Allerdings enthalten die Aufgaben überflüssige Zahlenangaben und verlangen weiterhin die zentralen Modellierungsaktivitäten. Zu Beginn der Unterrichtseinheit demonstrierten die Lehrpersonen, wie die Aufgabe Reiterhof mit einem bzw. zwei Lösungswegen bearbeitet werden kann. Dann wurden weitere Aufgaben in selbständigkeitsorientierter Gruppenarbeit gelöst und im Plenum besprochen. In der zweiten Doppelstunde wurden in der MML-Gruppe die Lösungswege verglichen, kontrastiert und miteinander verknüpft, bevor Lernende die Aufgaben mit einem, von ihnen präferierten Lösungsweg bearbeiteten. In EML-Lerngruppen haben Lernende weitere Aufgaben gelöst. Insgesamt hat die MML-Gruppe eine Aufgabe weniger als die EML-Gruppe gelöst, da die MML-Gruppe Zeit für die Diskussionen über mehrere Lösungswege gebraucht hat.

<table>
<tr>
<td>
Reiterhof MML
Paul sucht einen Reiterhof, bei dem sein Pferd eine Unterkunft hat und verpflegt wird, und er möchte Reitstunden nehmen.
Ungefähr 15 min vom Pauls Haus entfernt gibt es zwei Reiterhöfe:
<table>
<tr><td>Reiterhof Bannert</td><td>Reiterhof Larsen</td></tr>
<tr><td>Anzahl der Pferde: 26
Unterkunft und Verpflegung: 180 € pro Monat
Preis für eine Reitstunde: 15 €</td><td>Anzahl der Pferde: 52
Unterkunft und Verpflegung: 240 € pro Monat
Preis für eine Reitstunde: 12 €</td></tr>
</table>
Wann ist Reiterhof Bannert und wann Reiterhof Larsen günstiger?
Finde zwei verschiedene Lösungswege. Schreibe beide Lösungswege auf.
</td>
<td>
Reiterhof EML
Paul sucht einen Reiterhof, bei dem sein Pferd eine Unterkunft hat und verpflegt wird, und er möchte Reitstunden nehmen.
Ungefähr 15 min vom Pauls Haus entfernt gibt es zwei Reiterhöfe:
<table>
<tr><td>Reiterhof Bannert</td><td>Reiterhof Larsen</td></tr>
<tr><td>Anzahl der Pferde: 26
Unterkunft und Verpflegung: 180 € pro Monat
Preis für eine Reitstunde: 15 €</td><td>Anzahl der Pferde: 52
Unterkunft und Verpflegung: 240 € pro Monat
Preis für eine Reitstunde: 12 €</td></tr>
</table>
Wann ist Reiterhof Bannert und wann Reiterhof Larsen günstiger?
Finde einen Lösungsweg. Schreibe deinen Lösungsweg auf.
</td>
</tr>
</table>

Abb. 6: Variationen der Aufgabe „Reiterhof" im Unterricht mit multiplen mathematischen Lösungswegen und einem mathematischen Lösungsweg. Unterschiede in beiden Aufgabenvariationen sind kursiv hervorgehoben.

Die Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben im MML-Teilprojekt erforderte die Anwendung linearer Funktionen. Wir haben uns auf den tabellarischen Lösungsweg („Tabelle") und den inhaltlichen Lösungsweg durch Differenzenbildung („Differenzen") fokussiert, die beide angemessene Lösungsverfahren darstellen. Um die Entscheidung beim Lösen der Aufgabe Reiterhof zu begründen, kann man eine Tabelle erstellen, in der die Gesamtkosten für die beiden Reiterhöfe in Abhängigkeit von der Anzahl der Reitstunden ermittelt und verglichen werden. Zum Beispiel kostet der Reiterhof Bannert bei 10 Reitstunden 330 € (150 + 15 · 10) und Larsen 360 € (240 + 12 · 10). Bei der Differenzenbildung berechnen Lernende zuerst die monatliche Differenz in Grundkosten (240 - 180 = 60) und in Kosten pro Reitstunde (15 - 12 = 3). Dann berechnet man, dass die Differenz in Grundkosten nach 20 Reitstunden ausgeglichen ist (60 : 3 = 20). Dieses Ergebnis interpretiert man wie folgt: Bei 20 Reitstunden sind die beiden Reiterhöfe gleich teuer. Wenn man weniger als 20 Stunden in einem Monat reiten möchte, sollte man sich für den Reiterhof Bannert entscheiden. Wenn man mehr als 20 Reitstunden nehmen will, sollte man den Reiterhof Larsen wählen. Der effektive Einsatz des jeweiligen mathematischen Lösungswegs (EML) wurde in der Unterrichtseinheit thematisiert. In der EML-Tabelle wurde diskutiert, wie man mit wenigen Rechenschritten zum Schnittpunkt kommen kann, und in den EML-Differenzen wurde überlegt, warum man die Differenzen bildet, diese zueinander in Beziehung setzt und die Zahlen der Rechenschritte im Realkontext interpretiert. In der MML-Unterrichtseinheit wurden die beiden Lösungswege miteinander verglichen und Bezüge zwischen den Lösungswegen hergestellt. Für null Reitstunden identifiziert man zunächst die Gesamtkosten bei Bannert und Larsen (180 € bzw. 240 €) und berechnet die Differenz von 60 €. Bei einer Reitstunde sinkt die Differenz der Gesamtkosten um 3 € (von 60 € auf 57 €). Nun muss man sich lediglich überlegen, wann die Differenz der Gesamtkosten auf null sinkt, um den Schnittpunkt zu finden und kommt auf 20 Reitstunden. Im Unterricht wurden die Änderungen in der Anzahl an Reitstunden und die Änderungen in den Differenzen der Gesamtkosten zusätzlich durch Pfeile rechts und links von der Tabelle für die Lernenden veranschaulicht, um die Verbindung beider Lösungswege deutlich zu machen. Die Erläuterungen der beiden Lösungswege sollen das Phänomen der linearen Funktion umfassender beschreiben. Im weiteren Verlauf des Mathematikunterrichts können weitere Lösungswege wie z.B. die Gleichungssysteme dazukommen, um lineare Funktionen und ihre Eigenschaften aus unterschiedlichen Perspektiven zu beleuchten und vernetztes Wissen aufzubauen.

Anzahl der Reitstunden	Gesamtkosten, Bannert	Gesamtkosten, Larsen	Differenzen der Gesamtkosten
0	180 €	240 €	60 €
1	195 €	252 €	57 €
10	330 €	360 €	30 €
20	480 €	480 €	0 €

Tab. 2: Anzahl der Reitstunden, Gesamtkosten und Differenzen der Gesamtkosten

An der Untersuchung der MML nahmen 307 Schüler/innen der Jahrgangsstufe 9 (48,26 % weiblich, Durchschnittsalter 15 Jahre) aus vier Gesamtschulen mit jeweils drei Klassen teil, die von zwei Lehrpersonen unterrichtet wurden. Die Klassen wurden leistungsverhältnis- und geschlechtsverhältnishomogen in zwei gleichgroße Gruppen aufgeteilt. Die 24 Gruppen wurden den unterschiedlichen Lerngruppen (MML, EML-Tabelle und EML-Differenzen) so zugeteilt, dass die Lerngruppen in einer Klasse unterschiedlich waren und eine Lehrperson die gleiche Anzahl an Lerngruppen unterrichtete. Vor und nach der Unterrichtseinheit wurden die Leistungen bei Aufgaben erfasst, die ähnlich zu der Aufgabe Reiterhof waren, und das konzeptuelle Wissen von Lernenden erhoben. Das konzeptuelle Wissen bezog sich auf das Verständnis des Lerngegenstands. Hierfür sollten Lernende zum Beispiel begründen, ob die Verdopplung der Grundgebühr oder der laufenden Kosten auch die Verdopplung der Gesamtkosten bedeutet, ohne die expliziten Berechnungen durchzuführen. In den Befragungen vor und nach der Unterrichtseinheit wurden u.a. selbstreguliertes Lernen, Interesse und Selbstwirksamkeit erfasst. Während der Unterrichtseinheit wurden Lernende zu ihrem Kompetenzerleben sowie ihrem Empfinden von Freude und Langeweile befragt.

Die Ergebnisse der Leistungsmessung zeigten wieder, dass Lernende der MML-Gruppe und der beiden EML-Gruppen vergleichbare Ergebnisse erreichten. Schüler/innen in drei Lerngruppen verbesserten ihre Fähigkeiten, realitätsbezogene Aufgaben zu lösen und steigerten ihr konzeptuelles Wissen über die Lösung von Modellierungsaufgaben mit linearen Funktionen. Es zeigte sich, dass die Behandlung von MML das Kompetenzerleben im Unterricht verbessert hatte. Die Steigerung des Kompetenzerlebens hatte positive Effekte auf leistungsbezogene Faktoren und die Selbstwirksamkeit von Lernenden. Das selbstregulierte Lernen, das Interesse an Mathematik sowie das Empfinden von Freude und Langeweile im Unterricht wurden durch die Behandlung von MML nicht beeinflusst. Mathematisches Vorwissen und Selbstwirksamkeit erwiesen sich als wichtige Faktoren, die das Kompetenzerleben im Unterricht und darüber hinaus auch leistungsbezogene Merkmale und Selbstwirksamkeit im Nachtest beeinflussten. Die differentielle Betrachtung von Lernenden mit verschiedenen Lernvoraussetzungen zeigte, dass der MML-Unterricht besonders wirksam für Lernende mit niedriger Selbstwirksamkeit war. Gerade Lernende, die unsicher in Mathematik waren, profitierten von der Behandlung multipler Lösungen überdurchschnittlich stark.

8. Fazit

Die Behandlung multipler Lösungen ist ein Unterrichtselement, welches curricular fest verankert ist und deren positive Wirkungen auf das Lernen in Lerntheorien postuliert werden. In diesem Beitrag haben wir die bisherigen theoretischen und empirischen Erkenntnisse zum Thema „multiple Lösungen in Mathematik“ zusammengetragen. Anschließend wurde über das Projekt MultiMa berichtet, in dem der Einfluss und die Wirkmechanismen bei zwei Typen multipler Lösungen – multiple mathematische Lösungsergebnisse und multiple mathematische Lösungswege beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben – untersucht wurden. Der selbständigkeitsorientierte

Unterricht mit multiplen Lösungen hat sich hierbei an den Gestaltungsprinzipien wie das Vergleichen, Kontrastieren und Verknüpfen multipler Lösungen orientiert. Es zeigte sich, dass die Behandlung multipler Lösungen mindestens genauso gute Ergebnisse bringt wie die Behandlung einer Lösung. Die Behandlung offener Aufgaben mit multiplen Lösungsergebnissen erzielte sogar höhere Effekte auf metakognitive Strategien, das selbstregulierte Lernen und das Interesse an Mathematik. Im Einklang mit der Selbstbestimmungstheorie hat sich das Kompetenzerleben als wichtiger Faktor im Unterricht erwiesen. Lernende, die eine höhere Kompetenz im Unterricht erleben, steigern ihre Leistungen, ihre Selbstwirksamkeit und ihr Interesse stärker als andere Lernende. Die Behandlung multipler mathematischer Lösungswege konnte das Kompetenzerleben deutlich besser fördern als die Behandlung eines einzelnen mathematischen Lösungswegs. Entgegen einiger Befürchtungen konnten wir keine Nachteile des Unterrichts mit multiplen Lösungen bei leistungsschwächeren Lernenden feststellen. Lernende mit niedriger Selbstwirksamkeit steigerten im Unterricht mit multiplen Lösungen ihr Kompetenzerleben sogar überdurchschnittlich stark. Dies deutet darauf hin, dass der Unterricht mit multiplen Lösungen herausfordernd sein kann, aber nicht überfordernd sein muss. Wir hoffen, dass unsere Leserinnen und Leser nun wissen, was sie auf die Anmerkungen von Lernenden zu der Sinnhaftigkeit multipler Lösungen im Unterricht wie Lisa, Lucas, Jana und Jannik antworten und sie diese Unterrichtsmethode im eigenen Klassenraum ausprobieren.

Literatur

Achmetli, K., & Schukajlow, S. (2019). Multiple solution, the experience of competence and interest. In M. Hannula, G. Leder, F. Morselli, M. Vollstedt, & Q. Zhang (Eds.), *Affect in mathematics education* (pp. 39-65). Cham: Springer.

Achmetli, K., Schukajlow, S., & Rakoczy, K. (2019). Multiple solutions to solve real-world problems and students’ procedural and conceptual knowledge. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*, 1605–1625.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal, 93*, 373-397.

Bandura, A. (2003). *Self-efficacy: the exercise of control* (6th ed.). New York: Freeman.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Dubberke, T., Jordan, A., . . . Tsai, Y.-M. (2010). Teachers’ Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal, 47*, 133-180.

Blum, W., & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *Mathematik Lehren*(128), 18-22.

Blum, W., & Schukajlow, S. (2018). Selbständiges Lernen mit Modellierungsaufgaben – Untersuchung von Lernumgebungen zum Modellieren im Projekt DISUM. In S. Schukajlow & W. Blum (Eds.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren* (pp. 51–72). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Butz, A. R., & Usher, E. L. (2015). Salient sources of early adolescents' self-efficacy in two domains. *Contemporary educational psychology, 42*, 49-61.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning and instruction: essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453-492). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000). The „What“ and „Why“ of goal pursuits: Human needs and the selfdetermination of behavior. *Psychological Inquiry, 11*(4), 227-268.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., . . . Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries. Results from the TIMSS 1999 video study*. Washington, DC: NCES.

KMK. (2004). *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung*. München: Wolters Kluwer.

Krawitz, J., & Schukajlow, S. (2018). Realkontext ernst nehmen. Hürden beim Lösen von unterbestimmten Modellierungsaufgaben. *Mathematik Lehren, 207*, 10-15.

Krug, A., & Schukajlow, S. (2018). Multiple Lösungen beim mathematischen Modellieren – Konzeption und Evaluation einer Lernumgebung. In S. Schukajlow & W. Blum (Eds.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren* (pp. 241-264). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Krug, A., & Schukajlow, S. (2019). Entwicklung prozeduraler Metakognition und Selbstregulation durch den Einsatz multipler Lösungen zu Modellierungsaufgaben. *Journal für Mathematik-Didaktik*. doi:10.1007/s13138-019-00154-y

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 31*, 73-90.

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Neubrand, M. (2006). Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Eds.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (pp. 162-177). Berlin: Cornelsen.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Pekrun, R. (2006). The control-value theory of achievement emotions: Assumptions, corollaries, and implications for educational research and practice. *Educational Psychology Review, 18*, 315–341.

Richland, L. E., Zur, O., & Holyoak, K. J. (2007). Cognitive supports for analogies in the mathematics classroom. *Science, 316*, 1128-1129.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99*(3), 561-574.

Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2009). The Importance of Prior Knowledge When Comparing Examples: Influences on Conceptual and Procedural Knowledge of Equation Solving. *Journal of Educational Psychology, 101*(4), 836-852.

Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur*. Münster u.a.: Waxmann.

Schukajlow, S., Achmetli, K., & Rakoczy, K. (2019). Does constructing multiple solutions for real-world problems affect self-efficacy? *Educational Studies in Mathematics, 100*, 43-60.

Schukajlow, S., Blum, W., & Krämer, J. (2011). Förderung der Modellierungskompetenz durch selbständiges Arbeiten im Unterricht mit und ohne Lösungsplan. *Praxis der Mathematik in der Schule, 53*(38), 40-45.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(4), 497–533.

Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Müller, M., & Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. *Educational Studies in Mathematics, 79*(2), 215–237.

Schukajlow, S., & Rakoczy, K. (2016). The power of emotions: Can enjoyment and boredom explain the impact of individual preconditions and teaching methods on interest and performance in mathematics? *Learning and Instruction, 44*, 117–127.

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C. Y., & Font Strawhun, B. T. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Mathematical Behavior, 24*(3-4), 287-301.

Spiro, R. J., Coulson, R. L., Feltovich, P. J., & Anderson, D. K. (1988). Cognitiv Flexibility Theory: Advanced knowledge aquisition in ill-structured domains. *The tenth annual conference of the cognitive science society* (pp. 375-383). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction, 18*, 565-579.

Tsamir, P., Tirosh, D., Tabach, M., & Levenson, E. (2010). Multiple solution methods and multiple outcomes—is it a task for kindergarten children? *Educational Studies in Mathematics, 73*(3), 217-231.

Wertheimer, M. (1945/1964). *Produktives Denken* (2 ed.). Frankfurt, Main: Kramer.

Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a Self-Regulated Learner: An Overview. *Theory into Practice, 41*(2), 61-70.