TERHART, E. (2007): Erfassung und Beurteilung der beruflichen Kompetenzen von Lehrkräften, in: Lüders, M. / Wissinger, J. (Hrsg.): Forschung zur Lehrerbildung. Kompetenzentwicklung und Programmevaluation. Münster: Waxmann, 37–62.

WAHL (2001): Nachhaltige Wege vom Wissen zum Handeln. Beiträge zur Lehrerbildung, 19(2), 157–174.

WEINERT, F. E. (2001): Concept of Competence: A Conceptual Clarification, in: Rychen, D.S. / Salganik, L.H. (Hrsg.), Defining and Selecting Key Competencies. Göttingen: Hogrefe, 45–66.

Zur Rolle von multiplen Lösungen in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht

Stanislaw Schukajlow & Werner Blum

Universität Kassel

1 Einführung: Multiple Lösungswege und multiple Ergebnisse in der didaktischen Diskussion

Seit Veröffentlichung der Ergebnisse der TIMS-Studie und der begleitenden Dreiländer-Videostudie wird die Behandlung von mehreren Lösungswegen zu gegebenen Aufgaben in der Fachdidaktik und selbst in der Bildungspolitik viel diskutiert. Die genannten Studien zeigen, dass Mathematikunterricht in Japan offenbar – zumindest in gewissen Klassen – anders als in Deutschland und in den USA abläuft. Ein charakteristisches Merkmal des idealtypischen „japanischen" Unterrichtsskripts bilden anspruchsvolle Aufgaben, die mehrere Lösungswege erlauben (BAUMERT/ LEHMANN 1997; BECKER/ SHIMADA 1997; J. NEUBRAND/ NEUBRAND 1999). Der Arbeitsauftrag an die Schüler lautet dabei nicht wie üblich, eine Aufgabe zu lösen, sondern möglichst viele Lösungswege zu finden. Der Erfolg einzelner Schüler und Schülergruppen wird dann u.a. an der Anzahl der gefundenen Wege gemessen. Auch in der Bildungspolitik wird die Stimulierung unterschiedlicher Lösungswege im Anschluss an TIMSS und PISA verstärkt betont, konkretisiert z.B. im Modul „Weiterentwicklung der Aufgabenkultur" des bundesweiten Modellversuchsprogramms SINUS (siehe BAUMERT, et al. 1997; entsprechende Vorschläge sind z.B. zu finden bei BLUM/ WIEGAND 2000). Die Entwicklung von multiplen Lösungswegen gilt als ein wesentliches Qualitätskriterium eines kognitiv aktivierenden Unterrichts und wird in Deutschland im Zusammenhang mit den Bildungsstandards besonders hervorgehoben (M. NEUBRAND 2006).

Ein spezieller Typ von Aufgaben mit multiplen Lösungen sind offene, realitätsbezogene Aufgaben. Diese Aufgaben wurden insbesondere durch die PISA-Studie populär, bei der ein eher funktionales Verständnis der Mathematik im Vordergrund steht, wo die Mathematik vor allem als Werkzeug für Probleme aus Beruf und Alltag verstanden wird. Da Situationen in der Realität oft eine komplexe Struktur aufweisen, können auch die Ergebnisse je nach Annahmen und gewählten Modellen ganz unterschiedlich sein. Verschiedene Ergebnisse sind aber nicht nur beim Bearbeiten von realitätsbezogenen Aufgaben möglich. Auch innermathematische Aufgaben können zu verschiedenen Ansätzen und damit auch zu verschiedenen Ergebnissen führen. Die fundamentale Bedeutung der Variation von Annahmen zeigt sich in der höheren Mathematik beim axiomatischen Aufbau. Durch die Variation von Axiomen entstehen verschiedene „mathematische Welten“ mit unterschiedlichen Gesetzen und Folgerungen. Doch auch in der Elementarmathematik, wie etwa bei Überschlagsrechnungen, können Ergebnisse je nach Annahme verschieden sein.

In der Schulrealität ist die Behandlung von Aufgaben mit multiplen Lösungswegen und Ergebnissen noch nicht in der Breite angekommen (LEIKIN & LEVAV-WAYNBERG, 2007). Dies liegt nicht nur an traditionellen Vorstellungen der Lehrpersonen zum Mathematikunterricht oder an den höheren diagnostischen Anforderungen. Es ist durchaus möglich, dass u.a. auch Verständnisschwierigkeiten der Schüler Lehrpersonen dazu bewegen, nur Aufgaben mit eindeutigem, sequenziell aufgegliedertem Lösungsweg und mit eindeutigem Ergebnis zu thematisieren.

In diesem Beitrag sollen theoretische Überlegungen und empirische Studien zur Wirkung von multiplen Lösungen (verschiedene Lösungswege und verschiedene Ergebnisse) auf Lernprozesse und Leistungen von Schülern unterschiedlicher Leistungsniveaus vorgestellt werden.

2 *Multiple Lösungswege*

Multiple Lösungswege spielen in der Mathematik und insbesondere beim Problemlösen schon lange eine wichtige Rolle, auch wenn die Vielfalt von Lösungen bisher nur selten im Mittelpunkt des Forschungsinteresses gestanden hat. Schon bei Wertheimer (1945/ 1964) werden verschiedene Lösungsmöglichkeiten bei der Bestimmung des Flächeninhalts eines Parallelogramms thematisiert. In der Konzeption des „Task Space“ von Newell und Simon (1972) werden verschiedene Lösungswege sichtbar gemacht, indem alle möglichen Zustände des Problems zwischen dem Anfangszustand und dem Endzustand dargestellt werden. Allerdings wurde erst in den letzten Jahrzehnten die Frage gestellt, ob die Behandlung mehrer Lösungen zu einer Aufgabe ein vertieftes Verständnis bei Schülern hervorruft und Leistungsvorteile gegenüber der Betrachtung verschiedener Beispiele mit einem Lösungsweg bringt (RITTLE-JOHNSON/ STAR 2009). Die Wirksamkeit von multiplen Lösungswegen wird dabei vielfältig begründet.

2.1 Argumente für die Behandlung von multiplen Lösungswegen

Die erste Gruppe von Argumenten für die Behandlung multipler Lösungswege stützt sich auf konstruktivistisch orientierte Lerntheorien und Konzeptionen wie Cognitive Flexibility Theory (SPIRO/ COULSON/ FELTOVICH/ ANDERSON 1988) oder Cognitive Apprenticeship (COLLINS/ BROWN/ NEWMAN 1989).

In der Cognitive Flexibility Theorie wird davon ausgegangen, dass für das Lösen komplexer Probleme flexibles Wissen notwendig ist. Wissen kann aber nicht durch die Einübung eines schematischen Lösungsweges flexibilisiert werden. Deswegen ist es notwendig, verschiedene Perspektive bei der Lösung eines Problems einzunehmen und diese miteinander zu verbinden. Für den Mathematikunterricht heißt dies, zu einer Aufgabe mehrere Lösungswege zu behandeln, dabei auch verschiedene Darstellungen zu nutzen und über diese Perspektiven auf der Metaebene zu reflektieren.

Auch die theoretische Konzeption der „kognitiven Meisterlehre“ enthält Elemente, die Lernvorteile durch die Behandlung mehrerer Lösungswege nahelegen. Ein wichtiger Punkt dieser Konzeption ist nämlich der Austausch von Lernenden über verschiedene Strategien, die bei der Bearbeitung einer Aufgabe ausgeführt werden. Eine Öffnung des Unterrichts für multiple Lösungswege kann die Vielfalt von Strategien erhöhen, den inhaltlichen Austausch der Schüler bereichern und dadurch zum tieferen Verständnis des Lerngegenstandes führen.

Neben den genannten, aus Lehr-Lerntheorien abgeleiteten Argumenten werden noch weitere Aspekte thematisiert, welche die Bedeutung von multiplen Lösungswegen hervorheben:

- Die Entwicklung multipler Lösungswege vertieft – in der Begrifflichkeit der Gestaltpsychologie gesprochen – die Einsicht in die Struktur des Lerngegenstandes (WITTMANN 1995). Durch strukturelle Klarheit wird ein besseres Verständnis der Mathematik erreicht.
- Die Behandlung verschiedener Lösungswege zeigt auch grundsätzliche Möglichkeiten, eine Lösung zu optimieren (M. NEUBRAND 2006). Die Mathematik wirkt dadurch nicht nur algorithmisch-linear geprägt, sondern vielfältig und mehrschichtig.

- Durch mehrere Lösungswege sind kognitive Vernetzungen möglich (FENNEMA/ ROMBERG 1999; LEIKIN/ LEVAV-WAYNBERG 2007; PÓLYA 1948). Dies führt auch zur besseren Abrufbarkeit einzelner Konzeptionen aus dem Gedächtnis.
- Multiple Lösungswege fördern den Aufbau eines intelligenten, verstehenden Wissens (M. NEUBRAND 2006). Verschiedene mathematische Konzeptionen und Verfahren werden nicht nur nacheinander im Unterricht „durchgenommen", sondern werden immer wieder bei der Bearbeitung neuer Probleme und in unterschiedlichen Anwendungssituationen eingesetzt.
- Die Behandlung multipler Lösungswege fördert selbstregulative Fähigkeiten der Schüler. Sind Schülern zwei Lösungswege bekannt, kann das Ergebnis so auch eigenständig kontrolliert werden.

2.2 Empirische Ergebnisse zur Wirkung von multiplen Lösungswegen auf den Wissenserwerb

Derzeit sind uns die Ergebnisse von zwei Arbeitsgruppen bekannt, die unter methodisch kontrollierten Bedingungen die Wirkung von multiplen Lösungswegen auf Schülerleistungen differenziert untersucht haben. Ein charakteristisches Merkmal der Untersuchungskonzeptionen beider Arbeitsgruppen ist die Verwendung von Lösungsbeispielen (ATKINSON/ DERRY/ RENKL/ WORTHAM 2000) in ihren Instruktionen.

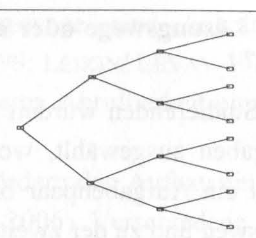
Die Arbeitsgruppe um A. Renkl hat die Behandlung mehrerer Lösungswege, die Rolle der instruktionellen Unterstützung bei der Arbeit mit multiplen Lösungswegen und die Bedeutung von multiplen Darstellungen im Bereich Kombinatorik und Stochastik untersucht (GROßE/ RENKL 2006). An der Untersuchung nahmen Studierende der Universität Freiburg teil.

Die zweite Arbeitsgruppe um B. Rittle-Johnson und J. R. Star hat sich mit der Frage beschäftigt, wie multiple Lösungswege beim Lösen von linearen Gleichungen vermittelt werden können (RITTLE-JOHNSON/ STAR 2007, 2009) und welche Rolle dabei das Vorwissen der Lernenden spielt (RITTLE-JOHNSON/ STAR/ DURKIN 2009). Die Untersuchungsgruppen bildeten Schüler des 7. und 9. Schuljahrs.

2.2.1 Ist es besser, mehrere Lösungswege oder einen Lösungsweg zu einer Aufgabe zu behandeln?

In der Freiburger Studie mit Studierenden wurden in einem Experiment insgesamt vier stochastische Aufgaben ausgewählt, wobei jeweils zwei Aufgaben sehr ähnlich waren und somit ein Aufgabenpaar bildeten. Zur ersten Aufgabe jedes Paars wurde ein Lösungsweg und zu der zweiten Aufgabe wurde ein anderer Lösungsweg präsentiert. Die beiden Lösungswege waren Produktregel und Baumdiagramm. So konnten Studierende sehen, dass eine Aufgabe auf zwei verschiedene Weisen gelöst werden kann. In der Kontrollbedingung wurde jeweils nur ein Lösungsweg – entweder Produktregel oder Baudiagramm – für ein Aufgabenpaar abgebildet. Dadurch sollte die Vorstellung vermittelt werden, dass der eine Lösungsweg nur für den einen und der andere Weg nur für den anderen Aufgabentyp passt. Das Kriterium für die Auswahl des Lösungsweges in den Lösungsbeispielen für die Kontrollgruppe war eine bessere Passung des Weges für den jeweiligen Aufgabentyp. Durch den Vergleich der beiden Untersuchungsbedingungen war angestrebt zu klären, welche Art der Behandlung von multiplen Lösungswegen stärker den Wissenserwerb der Lernenden fördert. Eine weitere Frage betraf die Wirkung der instruktionellen Unterstützung auf die Behandlung von Aufgaben mit und ohne multiple Lösungswege. Hierfür wurden drei Varianten der Unterstützung verglichen: (1) ohne zusätzliche Unterstützung, (2) mit Fragen zur Stimulierung von Selbsterklärungen oder (3) mit Erklärungen zu den präsentierten Lösungsbeispielen.

Trotz der sehr kurzen Interventionszeit von nur 10 Minuten hat die Studie gezeigt, dass die Behandlung mehrer Lösungswege Leistungsvorteile beim konzeptionellen Wissen bringt, insbesondere wenn Studenten zu Selbsterklärungen angehalten werden. Unter konzeptionellem Wissen wurde dabei ein vertieftes Verständnis mathematischer Begriffe und ihrer Anwendungsbedingungen verstanden. Ein Beispielitem aus dem Test war:



Was haben dieses Baumdiagram und die Gleichung 2·2·2=8 gemeinsam?

Abb. 1: Konzeptuelles Wissen

Beim prozeduralen Wissen, d.h. bei der Anforderung, eine Aufgabe tatsächlich zu lösen, gab es keine Unterschiede zwischen den Gruppen. Somit liefert diese Untersuchung ein differenziertes Bild zur Wirksamkeit von multiplen Lösungswegen.

In der nachfolgenden Untersuchung im Bereich Stochastik, die ähnlich angelegt war, wurden die positiven Ergebnisse des ersten Experiments nicht bestätigt. Lediglich die Art der Repräsentation der Lösung (algebraisch vs. Baumdiagramm) hat die Leistungen beeinflusst. Die Autoren erklären dies vor allem mit der Komplexität des Materials. Durch die Präsentation von mehreren komplexen Lösungswegen zu anspruchsvollen Problemen werden Lernende kognitiv überlastet und können die beiden Elemente nicht zu einem kohärenten Ganzen verbinden. Weitere kritische Punkte der Untersuchung bilden die kurze Interventionszeit und eine starke Ähnlichkeit der Lernmaterialien. Da die Kontrollgruppe mit den gleichen Aufgaben gearbeitet hat und auch noch jeweils den passenderen Lösungsweg präsentiert bekommen hat, überrascht es nicht, dass auch die Leistungen beider Gruppen im Nachtest vergleichbar waren. Durch die Vorstellung des jeweils besseren Lösungswegs zu einer Aufgabe konnte in der Kontrollgruppe implizites Wissen über die Passung des Lösungsweges vermittelt werden. Dieses Wissen führte dann zur Flexibilisierung des prozeduralen Wissens und folglich auch zu besseren Testergebnissen.

Als Antwort auf die Frage, die in der Überschrift dieses Abschnitts gestellt wurde, schreiben die Autoren zusammenfassend: „Multiple solution methods can foster learning outcomes … but do not necessarily do so …" (GROßE/RENKL 2006).

2.2.2 Leistungsfortschritte im algebraischen Wissen durch die Gegenüberstellung verschiedener Lösungswege

Der inhaltliche Ausgangspunkt der Untersuchungen der amerikanischen Arbeitsgruppe um Star und Rittle-Johnson waren unzureichende algebraische Kenntnisse der Schüler, u.a. beim Lösen von linearen Gleichungen. Bei Gleichungen mit Klammern werden in der Schule i.d.R. erst alle Klammern aufgelöst und dann weitere Umformungsschritte vollzogen (Lösungsweg von Mandy in Abb. 2). Selten wird hingegen die Gleichung vereinfacht, bevor Klammern aufgelöst werden, obwohl dieser Lösungsweg oft kürzer und einfacher ist (Lösungsweg von Erica in Abb. 2). Durch die Behandlung beider Lösungswege sollten Schüler lernen, Gleichungen schneller zu lösen und ihr Wissen über Gleichungen zu vertiefen.

Während die Freiburger Arbeitsgruppe aus forschungsmethodischen Gründen[1] darauf verzichtet hat, zwei Lösungswege an der *gleichen* Aufgabe gegenüberzustellen (GROßE 2005), hat die amerikanische Arbeitsgruppe dies getan. Durch die Abbildung von zwei Lösungswegen zu der gleichen Aufgabe nebeneinander wurde ein Präsentationsformat entwickelt, das die Vernetzungen zwischen den beiden Lösungswegen erleichtert und die Kohärenzbildung stärker als die sequenzielle Darstellung der Lösungswege fördert.

Mandy's Solution:		**Erica's Solution:**	
$5(y+1) = 3(y+1)+8$		$5(y+1) = 3(y+1)+8$	
$5y+5 = 3y+3+8$	*Distribute*	$2(y+1) = 8$	*Subtract on Both*
$5y+5 = 3y+11$	*Combine*	$y+1 = 4$	*Divide on Both*
$2y+5 = 11$	*Subtract on Both*	$y = 3$	*Subtract on Both*
$2y = 6$	*Subtract on Both*		
$y = 3$	*Divide on Both*		

1. Mandy and Erica solved the problem differently, but they got the same answer. Why?

2. Why might you choose to use Erica's way?

Abb. 2: Gegenüberstellung von zwei Lösungswegen zu einer Aufgabe

[1] Ein Grund für diese Entscheidung war die Gefahr der Konfundierung der beiden Versuchsbedingungen „multiple Lösungswege" und „Anzahl der Aufgaben".

Mandy's Solution:

$$\begin{aligned} 5(y+1) &= 3(y+1)+8 & \\ 5y+5 &= 3y+3+8 & \textit{Distribute} \\ 5y+5 &= 3y+11 & \textit{Combine} \\ 2y+5 &= 11 & \textit{Subtract on Both} \\ 2y &= 6 & \textit{Subtract on Both} \\ y &= 3 & \textit{Divide on Both} \end{aligned}$$

1. **Would you choose to use Mandy's way to solve problems like this? Why or why not?**

-----NEXT PAGE-----

Erica's Solution:

$$\begin{aligned} 10(x+3) &= 6(x+3)+16 & \\ 4(x+3) &= 16 & \textit{Subtract on Both} \\ x+3 &= 4 & \textit{Divide on Both} \\ x &= 1 & \textit{Subtract on Both} \end{aligned}$$

1. **Check Erica's solution by substituting her answer into the equation. Did Erica get the right answer?**

Abb. 3: Sequenzielle Präsentation von zwei Lösungswegen zu zwei ähnlichen Aufgaben

Die Studie umfasste insgesamt vier Unterrichtsstunden à 45 min. Am ersten Tag haben die Schüler aus beiden Untersuchungsbedingungen einen Pretest bearbeitet und wurden dann von der Lehrperson aufgefordert, die Gleichung 2(y-3)+5y=22 selbständig zu lösen. Dann präsentierte die Lehrperson einen Lösungsweg an der Tafel und wies darauf hin, dass eine Gleichung auch anders gelöst werden kann. In der 2. Unterrichtsstunde wurde gezeigt, wie Schülerpaare mit den Lösungsbeispielen arbeiten sollen, und die ersten Lösungsbeispiele und Übungsaufgaben wurden ausgeteilt. Die Schüler wurden angewiesen, abwechselnd in Partnerarbeit an den Lösungsbeispielen zu arbeiten und die Übungsaufgaben in Einzelarbeit zu lösen. Bei der Arbeit am Lösungsbeispiel wurden die Schüler angehalten, sich gegenseitig den Lösungsweg vorzulesen und zu erklären, die Fragen zu den Lösungsbeispielen zu beantworten sowie die Antwort schriftlich festzuhalten. Die Lehrperson und zwei Projektmitarbeiter unterstützten die Lernenden bei der Arbeit. Die Lehrerinterventionen bezogen sich auf Schwierigkeiten, die in den Lösungsbeispielen nicht explizit aufgeführt waren (z.B., wie man 4y durch ¼ teilt). In der 3. Unterrichtsstunde wurde die Arbeit an komplexeren Gleichungen fortgesetzt. In der letzten Stunde wurde von der Lehrperson die Arbeit der vergangenen drei Tagen kurz zusammengefasst (ca. 10 min), dann bearbeiteten die Schüler einen Posttest. In der Zusammenfassung hat die Lehrperson folgende Punkte herausgestellt:

- Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Aufgabe zu lösen. Jeder Lösungsweg ist erlaubt, solange die beiden Seiten der Gleichung „im Gleichgewicht" bleiben.
- Einige Wege sind bei bestimmten Aufgaben besser als andere. Dies ist der Fall, wenn ein Lösungsweg einfacher und weniger fehleranfällig ist.

Um die Fortschritte zu messen, wurde neben konzeptionellem und prozeduralem Wissen noch die Flexibilität des prozeduralen Wissens getestet. Darunter verstehen die Autoren Wissen über verschiedene Lösungswege sowie darüber, wann welcher Lösungsweg vorteilhaft ist.

Prozedurales Wissen:	Löse die Gleichung -3(x + 5 + 3x) - 5 (x + 5 + 3x) = 24
Prozedurale Flexibiliät:	Finde alle möglichen Umformungen für die Gleichung 2(x + 1) + 4 = 12, die im nächsten Schritt gemacht werden können (4 Möglichkeiten)
Konzeptionelles Wissen:	Unten sind zwei Gleichungen abgebildet. Du muss sie nicht lösen. 213x + 476 = 984 213x + 476 + 4 = 984 + 4 a. Was kannst du über die Lösungen dieser Gleichungen sagen? (Antwortmöglichkeiten: Beide Lösungen sind gleich; beide Lösungen sind verschieden; Ohne die Aufgaben zu lösen, kann ich die Frage nicht beantworten) b. Begründe deine Antwort

Die Arbeitsprozesse der Schüler beim Vergleich von zwei Lösungswegen in den Lösungsbeispielen aus Abb. 2 illustriert folgender Beispieldialog von zwei Lernenden:

High learners: Ben and Krista

[Quickly describe Mandy's solution and move to Erica's solution]
Krista: "What'd they [Erica] do?"
Ben: "Subtracted 3(y + 1) and they had that as one whole term, so they...and then over here was (y + 1). Subtracted 3(y + 1) from 5(y + 1) to get 2(y + 1). And this wasn't over here, so 2(y + 1) = 8."
Ben: "That's correct. Subtracted them on both. So then y + 1 = 4, they divided this by two and divided this by two.... These are both correct."
Krista: "I believe, because when they divided it by two, what happened to, they just divided it by two and that kinda makes the two go bye-bye? Or"
Ben: "Because if you have two of this and you divide by two, you only have one y + 1, correct? And over here you divide 8 by two and have four.
Krista: "Right. Or you could also multiply by the reciprocal and basically get the same thing."
[They read the first question and clarify its meaning.]
Krista: "They both did the problem correctly.... But they just did different ways, but they got the same answer.... Mandy just kinda did a few extra steps, I believe. She did like"
Ben: "Mandy distributed"
Krista: "and combined."
Ben: "but over here, Erica used, she like"
Krista: "just went right on to subtraction."
Ben: "she used 3(y + 1) as a term for - I don't know, how would you say that?"
[They paused and asked the teacher for help. He helped them remember the phrase "like terms."]
Ben: "Mandy distributed and"
Krista: "combined..."
Ben: "and Erica subtracted. Subtracted"
Krista: "subtracted from the like terms. But then, they basically did the same steps after that, but just in a different order."
[Finally, prompted by the second question, after a brief discussion,]
Krista concluded: "It's quicker...more efficient."

Abb. 4: Dialog von zwei Schülern

Die Schüler diskutieren in diesem Ausschnitt ausführlich über den neuen Lösungsweg, erklären sich gegenseitig unklare Stellen und stellen den Vorteil des neuen Lösungswegs (Geschwindigkeit bzw. Effizienz) heraus.

Die Analyse der Testergebnisse zeigt, dass eine direkte Gegenüberstellung im Vergleich zur sequenziellen Behandlung von zwei Lösungswegen deutliche Leistungsvorteile in allen getesteten Wissensbereichen bringt (RITTLE-JOHNSON/STAR 2007, 2009). Woran liegt das? Eine ausführliche Analyse der schriftlichen Notizen der Schüler zeigt größere Anteile an Reflexionsäußerungen über die alternativen Lösungswege bei einer direkten Gegenüberstellung beider Wege. In dieser Unterrichtsart haben Schüler zudem mehr Aufgaben mit dem zweiten, bisher ungewohnten Lösungsweg bearbeitet. Eine typische Äußerung in der Bedingung mit der Gegenüberstellung von Lösungswegen war z.B.: "It is OK to do either step if you know how to do it. Mary's way is faster, but only easier if you know how to properly combine the terms. Jessica's solution takes longer, but is also OK to do". In der zweiten Variante wurde fast immer nur auf den jeweils präsentierten Lösungsweg Bezug genommen und kaum etwas über die Effektivität der einen bzw. der anderen Lösungsvariante gesagt: "Yes [I would choose this way] because he distributed in the right way and he added and divided on both sides correctly."

Zusammengefasst kann man sagen, dass Schüler häufiger den effektiveren (kürzeren) Lösungsweg in der Variante mit Gegenüberstellung von zwei Lösungswegen benutzen und dabei auch weniger Fehler machen. Dies deutet auf eine größere Flexibilität des Wissens hin, das in dieser Unterrichtsvariante erworben wurde.

2.2.3 Zur Rolle des Vorwissens der Lernenden im Unterricht mit multiplen Lösungswegen

Obwohl die Gegenüberstellung von zwei Lösungswegen im Allgemeinen effektiver als ihre sequenzielle Präsentation ist, gibt es Hinweise, dass diese Methode nicht immer optimale Lerngelegenheiten bietet. Da unser kognitives System nur eine begrenzte Anzahl an neuen Informationen zu einem gegebenen Zeitpunkt verarbeiten kann, ist u.a. das Vorwissen der Lernenden ein Faktor, der die Wirksamkeit einer Unterrichtsinstruktion beeinflusst. Dies bestätigen Experten-Novizen-Untersuchungen im Rahmen der Cognitive-Load-Theorie (SWELLER 1994), die zuletzt von Kalyuga (2007) umfassend analysiert wurden. Dabei stellte sich heraus, dass Novizen besser mit Lösungsbeispielen und Probanden mit mittlerem Vorwissensniveau effektiver ohne Lösungsbeispiele das Problemlösen lernen. Diese Befunde werden mit der Überlastung des Arbeitsgedächtnisses bei den Novizen erklärt. Lösungsbeispiele bieten demnach mehr Unterstützung für Lerner mit wenig Vorwissen und entlasten dadurch ihr kognitives System.

Schätzt man die kognitive Belastung von Lernenden mit wenig Vorwissen beim Bearbeiten von Aufgaben mit multiplen Lösungswegen ein, fällt der Vergleich zunächst zugunsten der Gruppe aus, welche die Lösungen der Reihe nach bearbeitet. In dieser Gruppe können Lernende sich ausschließlich mit dem Verstehen des jeweiligen Lösungswegs befassen und ihre kognitiven Aktivitäten nur darauf richten. Beim unmittelbaren Vergleich von zwei unbekannten Wegen sollten zusätzlich auch Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den beiden Lösungswegen identifiziert werden. Solch eine Ballung von Anforderungen kann Lernende mit wenig Vorwissen überfordern und ihren Lernprozess verlangsamen.

Die Frage, welche der beiden Lehr-Lernmethoden für Schüler mit wenig Vorwissen besser ist, wurde in einer Studie zum Lösen von linearen Gleichungen mit 7. und 8.-Klässlern empirisch geprüft (RITTLE-JOHNSON et al. 2009). Die Schülergruppen wurden in dieser Untersuchung wie folgt definiert: Schüler mit wenig Vorwissen haben im Unterschied zu den leistungsstärkeren Lernenden keine algebraischen Umformungen im Vortest verwendet. Beide Schülergruppen wurden mit zwei unterschiedlichen Treatmentvarianten konfrontiert. In einer Treatmentart wurden zwei Lösungsbeispiele zu einer Aufgabe nebeneinander abgebildet. In der anderen Treatmentvariante wurden den Lernenden nach einander Aufgaben mit Lösungsbeispielen präsentiert, die mit verschiedenen Lösungswegen bearbeitet wurden. Nach einem Lösungsbeispiel wurden Übungsaufgaben zum Bearbeiten angeboten. Die beiden Untersuchungsbedingungen waren also ähnlich wie auch in anderen Studien der amerikanischen Arbeitsgruppe implementiert (vgl. Abschnitt 2.2552.2).

Die Untersuchung zeigte, dass Schüler mit wenig Vorwissen mehr lernen, wenn sie zwei Lösungswege nacheinander analysieren. Schüler mit Vorwissen profitieren hingegen stärker von der Gegenüberstellung beider Lösungswege mit zusätzlicher Aufforderung, Gemeinsamkeiten und Unterschiede herauszuarbeiten. Dieses Ergebnis weist auf die Notwendigkeit hin, die Arbeit in leistungsschwachen und leistungsstarken Gruppen unterschiedlich zu gestalten. In leistungsschwächeren Gruppen müssten verschiedene Lösungswege vermutlich am Anfang getrennt behandelt werden. Erst nachdem das Vorwissen gesichert ist, kann der Vergleich verschiedener Lösungswege das Wissen der Schüler flexibilisieren und zur Leistungssteigerung führen.

3 *Multiple Lösungsergebnisse*

Multiple Ergebnisse entstehen u.a. im Zusammenhang mit Modellierungsprozessen. Durch verschiedene Modelle, die zu einer gegebenen Realsituation konstruiert werden können, unterscheiden sich die mathematischen Resultate und somit letztlich auch die Ergebnisse der Aufgabe. Zuerst soll die Frage geklärt werden, welche Argumente für die Behandlung multipler Lösungsergebnisse sprechen.

3.1 Argumente für die Behandlung multipler Lösungsergebnisse im Unterricht

Im Anschluss an Winter (1995) kann der Beitrag von multiplen Lösungsergebnissen zur Allgemeinbildung, und damit auch die Legitimierung ihrer Behandlung im Unterricht, durch einen Bezug zu den Grunderfahrungen (Argumente 1 und 2) deutlich gemacht werden, die Schülern im Mathematikunterricht vermittelt werden sollen. Lernpsychologische Gründe (Argument 3) spiegeln weitere Vorteile wider, die von der Behandlung von Modellierungsaufgaben erhofft werden.

1. Komplexe Prozesse in der Umwelt wie z.B. der Klimawandel oder die Entwicklung auf den Aktienmärkten können kaum exakt beschrieben werden. Um solche Prozesse abzubilden, die Ergebnisse der Modellierung zu verstehen und sie zu interpretieren, ist es notwendig zu wissen, dass Modelle und damit Lösungsergebnisse verschieden sein können. Die Aufgabe des Unterrichts ist somit, Schülern zu vermitteln, dass Ergebnisse einer mathematischen Aufgabe verschieden sein können. Zudem sollten die Ursachen der Vielfalt von Ergebnissen thematisiert werden, indem Zusammenhänge zwischen den Modellannahmen und den Ergebnissen offengelegt werden.
2. Die Idee, dass es bei der Lösung einer Aufgabe verschiedene Ergebnisse geben kann, ist ein wichtiger Teil der mathematischen Kultur. Durch die Behandlung von Aufgaben mit verschiedenen Ergebnissen in der Grundschule (NÜHRENBÖRGER/ STEINBRING 2009) oder sogar im Vorschulalter (TSAMIR/ TIROSH/ TABACH/ LEVENSON 2010) werden Schüler bereits auf Fallunterscheidungen vorbereitet.
3. Schließlich bringt die Behandlung von Aufgaben mit multiplen Ergebnissen Vorteile im lernpsychologischen Bereich. Verschiedene Annahmen, die beim Bearbeiten von Aufgaben getroffen werden, bieten die Gelegenheit, Lernaktivitäten stärker auf die Lösungswege zu fokussieren. In der Reflexionsphase reicht es nicht, ausschließlich das Endergebnis zu vergleichen. Wenn Lernende wissen wollen, ob die Aufgabe richtig gelöst ist, müssen sie ihre Lösung als Ganzes abgleichen. Dadurch wird die Aufgabenstellung mit verschiedenen Ausgangsgrößen durchdacht und tiefer durchgearbeitet als im Unterricht mit nur einem Lösungsergebnis.

3.2 Behandlung von Aufgaben mit multiplen Ergebnissen aus Schüler- und Lehrersicht

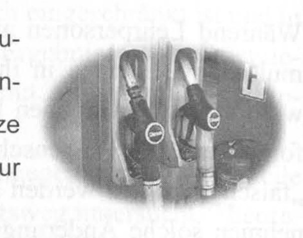
Wie Aufgaben mit multiplen Lösungsergebnissen im Unterricht behandelt sollen und welchen Einfluss mehrere Ergebnisse auf den Wissenserwerb der Schüler haben, wurde nach unserem Wissensstand noch nicht erforscht. Aus diesem Grund wird in diesem Beitrag auf Erfahrungen aus Studien im Rahmen des DISUM-Projekts (SCHUKAJLOW et al. im Druck) zurückgegriffen, in denen die Behandlung von Modellierungsaufgaben mit multiplen Lösungswegen und -ergebnissen durch Schüler und Lehrer untersucht wurde.

3.2.1 Besonderheiten des Unterrichtens von Aufgaben mit multiplen Ergebnissen aus Lehrersicht

Im Rahmen einer Teilstudie von DISUM (SCHUKAJLOW et al. 2010) hat eine erfahrene Lehrkraft (Herr B.) fünf Modellierungsaufgaben etwa fünf Unterrichtsstunden lang in sechs verschiedenen Realschulklassen der 9. Jahrgangsstufe unterrichtet. Auf die Frage zu den Besonderheiten des Unterrichts mit Modellierungsaufgaben nannte Herr B. vor allem erhöhte diagnostische Anforderungen an die Lehrperson. Demnach sei es schwieriger, im Unterricht mit Modellierungsaufgaben sofort zu erkennen, inwiefern die Lösung einer Aufgabe richtig ist. Durch die größere Vielfalt an Lösungswegen und Ergebnissen unterscheiden sich auch Schülerschwierigkeiten stärker als im Unterricht mit traditionellen Aufgaben. Unter diesen Umständen brauchen Lehrpersonen wesentlich mehr Zeit, um Probleme der Lernenden zu diagnostizieren und adäquate Hilfen zu geben.

Da die Zeit für Diagnose und Interventionen im Unterricht oft begrenzt ist, können speziell bei Aufgaben mit unterschiedlichen Ergebnissen Hilfsmittel eingesetzt werden, die diagnostische Prozesse erleichtern sollen. Ein solches Hilfsmittel wurde von Herrn B. bei der Bearbeitung der Aufgabe „Tanken“ herangezogen. Eine arithmetische Lösung der Aufgabe „Tanken“ verlangt zumindest die Annahmen zum Verbrauch und zum Tankvolumen eines Autos.

Tanken



Frau Stein wohnt in Trier 20 km von der Grenze zu Luxemburg entfernt. Sie fährt mit ihrem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,05 Euro, im Gegensatz zu 1,30 Euro in Trier.

Lohnt sich die Fahrt für Frau Stein? Schreibe deinen Lösungsweg auf.

Abb. 5: Aufgabe „Tanken“

Werden diese Annahmen variiert, schwankt auch das mathematische Ergebnis stark. In dieser Situation ist es nicht möglich, schnell zu beurteilen, ob ein Ergebnis richtig ist. Um diesem Problem zu begegnen, hat Herr B. seinen Taschenrechner so programmiert, dass die Ersparnis aus den angegebenen Ausgangsgrößen mit Hilfe des einfachsten mathematischen Modells (nur Kosten berücksichtigt) ausgerechnet wird (hier also: Ersparnis beim Tanken in Luxemburg $V*0{,}25 - C*0{,}52$ mit V als Tankvolumen in Liter und C als Verbrauch in l pro 100 km). Im Unterricht handelte Herr B. so: Zuerst schaute er sich die Lösung an und verschaffte sich einen allgemeinen Eindruck, ob sie stimmt. War das der Fall, tippte Herr B. den von den jeweiligen Schülern angenommenen Autoverbrauch und das jeweils angenommene Tankvolumen in den Taschenrechner ein und sagte den Schülern, ob das Ergebnis richtig ist. War dies der Fall, musste die Lehrperson sich nicht weiter mit der Analyse der Berechnungen in der Schülerlösung befassen. Nur bei einem falschen mathematischen Resultat hat Herr B. die Lösung genau analysiert.

Dieses Beispiel zeigt exemplarisch, dass Aufgaben mit multiplen Ergebnissen erhöhte Anforderungen an die diagnostischen Fähigkeiten der Lehrperson stellen, aber auch, dass man sich auf solche Probleme im Vorfeld zumindest in begrenztem Umfang vorbereiten kann. Im folgenden Abschnitt wird nun über Erfahrungen der Schüler mit multiplen Lösungsergebnissen berichtet.

3.2.2 Schülerreaktionen auf Aufgaben mit multiplen Lösungsergebnissen

Während Lehrpersonen aus didaktischen Gründen Modellierungsaufgaben mit multiplen Lösungen in ihren Unterricht aufnehmen, wissen Schüler oft nicht, warum solche Aufgaben behandelt werden. Ihr Bild von Mathematik als einer formal-exakten Wissenschaft, in der jeder Sachverhalt immer als „richtig" oder „falsch" beurteilt werden kann, wird dadurch massiv gestört. Nicht alle Schüler nehmen solche Änderungen als selbstverständlich hin. Wie folgendes Beispiel zeigt, äußern einige Lernende ihr Unverständnis über diese neuen Aufgaben.

Bei der Bearbeitung der dritten Aufgabe aus einer längeren Unterrichtseinheit zum Modellieren (Aufgabe „Reiterhof", bei der es darum geht zu entscheiden, welcher von drei Reiterhöfen mit gegebenen Kostenstrukturen der günstigste ist) sagt ein Schüler, dass ihm eine Angabe fehlt. „*Man weiß ja nicht, wie viele Reitstunden er nehmen will.*" Auf den Hinweis des Lehrers, dass er die Angaben ergänzen soll, sagt dieser Schüler dann: „*Ich kann mir das aber nicht einfach ausdenken. [...] Es kommt ja jeder auf ein anderes Ergebnis.*" Diese Äußerung zeigt, dass der Schüler multiple Ergebnisse bei der Bearbeitung einer Aufgabe für nicht möglich hält. Die Lehrperson muss deshalb bei der Behandlung von Aufgaben mit multiplen Ergebnissen auf solche Schwierigkeiten vorbereitet sein und sie an geeigneter Stelle bewusst ansprechen (SCHUKAJLOW/ BLUM/ KRÄMER, 2011).

Da Gründe für die Behandlung von Modellierungsaufgaben Schülern nicht unmittelbar ersichtlich sind, müssen sie von der Lehrperson thematisiert werden. Dies würde die subjektive Bedeutung dieses Aufgabentyps für Schüler und damit auch ihre aufgabenbezogene Motivation positiv beeinflussen.

4. *Aufgaben mit multiplen Lösungen im Unterricht: Zusammenfassung und Ausblick*

In diesem Beitrag wurden theoretische Überlegungen und empirische Ergebnisse zur Wirkung der Bearbeitung von Aufgaben mit multiplen Lösungswegen und multiplen Lösungsergebnissen auf Lernprozesse der Schüler vorgestellt. Im Mittelpunkt des Forschungsinteresses stand in den letzten Jahren die Frage, wie multiple Lösungswege im Unterricht behandelt werden können. Die bisherigen Befunde deuten auf Vorteile einer Gegenüberstellung von zwei Lösungswegen im Unterricht bei Schülern, die über Vorwissen zumindest zu einem Lösungsweg verfügen. Für Schüler mit wenig Vorwissen scheint es hingegen vorteilhaf-

ter zu sein, zwei Lösungswege nacheinander zu erlernen. Auch wenn die Aussagekraft dieser Befunde aus verschiedenen Gründen noch eingeschränkt ist und in weiteren Studien bestätigt werden muss, geben solche Ergebnisse erste Orientierungen bei der praktischen Gestaltung des Unterrichts mit Aufgaben, die multiple Lösungswege ermöglichen.

In keiner den Autoren bekannten Studie wurden hingegen bisher die Vorteile mehrerer Lösungswege im Vergleich zu einem Lösungsweg untersucht. Theoretische Überlegungen lassen solche Vorteile zwar vermuten, eine empirische Überprüfung dieser Hypothese könnte aber zur Konsolidierung der Ergebnisse in diesem Forschungsfeld beitragen.

Ein weiteres noch wenig beforschtes Feld ist die Untersuchung von Bearbeitungsprozessen bei Aufgaben mit multiplen Lösungen. Erste explorative Analysen zum Unterricht mit Modellierungsaufgaben deuten auf erhöhte diagnostische Anforderungen an Lehrer, wenn es um multiple Lösungen geht. Die Analyse von Schülerreaktionen auf Aufgaben mit mehreren Lösungen weist darauf hin, dass sie zwar die Besonderheit solcher Aufgaben, nicht aber ihre Bedeutung für ihren Lernprozess und ihre mathematische Bildung wahrnehmen. Insofern bieten solche Aufgaben auch ein hohes Potential für die Verbesserung des mathematischen Weltbilds von Schülern (und mitunter auch von Lehrern).

Literatur

ATKINSON, R. K. / DERRY, S. J. / RENKL, A. / WORTHAM, D. (2000): Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research, in: Review of Educational Research, 70, 181–214.

BAUMERT, J. / BAYRHUBER, H. / BRACKHAHN, B. / DEMUTH, R. / DURNER, H. / FISCHER, H. E. et al. (1997): Gutachten zur Vorbereitung des Programms "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Bonn: BLK.

BAUMERT, J. / LEHMANN, R. (1997): TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.

BECKER, J. P. / SHIMADA, S. (1997): The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics. Reston: NCTM.

BLUM, W. / WIEGAND, B. (2000): Offene Aufgaben - wie und wozu?, in: mathematik lehren, 100, 52–55.

COLLINS, A. / BROWN, J. S. / NEWMAN, S. E. (1989): Cognitive Apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Wrighting and Mathematics, in: Resnik, L. B. (Ed.), Knowing, Learning and Instruction: Essay in Honor of Robert Glaser. Hilldsdale. NJ: Erlbaum, 453–492.

FENNEMA, E. H. / ROMBERG, T. A. (Eds.) (1999): Classrooms that Promote Mathematical Understanding. Mahwah. NJ: Erlbaum.

GROßE, C. S. (2005): Lernen mit multiplen Lösungswegen. Münster: Waxmann.

GROßE, C. S. / RENKL, A. (2006): Effects of Multiple Solution Methods in Mathematics Learning, in: Learning and Instruction, 16(2), 122–138.

KALYUGA, S. (2007): Expertise Reversal Effect and its Implications for Learner-Tailored Instruction, in: Educational Psychology Review, 19(4), 509–539.

LEIKIN, R. / LEVAV-WAYNBERG, A. (2007): Exploring Mathematics Teacher Knowledge to Explain the Gap Between Theory-based Recommendations and School Practice in the Use of Connecting Tasks, in: Educational Studies, 66(3), 349–371.

NEUBRAND, J. / NEUBRAND, M. (1999): Effekte multipler Lösungsmöglichkeiten: Beispiele aus einer japanischen Mathematikstunde, in: Selter, C. / Walter, G. (Eds.), Mathematikdidaktik als design science. Leipzig: Klett, 148–158.

NEUBRAND, M. (2006): Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung, in: Blum, W. / Drüke-Noe, C. / Hartung, R. / Köller, O. (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen, 162–177.

NEWELL, A. / SIMON, H. A. (1972): Human Problem Solving. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall.

NÜHRENBÖRGER, M. / STEINBRING, H. (2009): Forms of Mathematical Interaction in Different Social Settings: Examples from Students', Teachers' and Teacher-Students' Communication about Mathematics, in: Journal for Mathematics Teacher Education, 12(2), 111–132.

PÓLYA, G. (1948): How to Solve it: a New Aspect of Mathematical Method. Princeton. N.J.: Princeton University Press.

RITTLE-JOHNSON, B. / STAR, J. R. (2007): Does Comparing Solution Methods Facilitate Conceptual and Procedural Knowledge? An Experimental Study on Learning to Solve Equations, in: Journal of Educational Psychology, 99(3), 561–574.

RITTLE-JOHNSON, B. / STAR, J. R. (2009): Compared with What? The Effects of Different Comparisons on Conceptual Knowledge and Procedural Flexibility for Equation Solving, in: Journal of Educational Psychology, 101(3), 529–544.

RITTLE-JOHNSON, B. / STAR, J. R. / DURKIN, K. (2009): The Importance of Prior Knowledge When Comparing Examples: Influences on Conceptual and Procedural Knowledge of Equation Solving, in: Journal of Educational Psychology, 101(4), 836–852.

SCHUKAJLOW, S. / BLUM, W. / KRÄMER, J. (2011): Förderung der Modellierungskompetenz durch selbständiges Arbeiten im Unterricht mit und ohne Lösungsplan. Praxis der Mathematik in der Schule 52(2), 40–45.

SCHUKAJLOW, S. / BLUM, W. / KRÄMER, J. / BESSER, M. / BRODE, R. / LEISS, D. (2010): Lösungsplan in Schülerhand: zusätzliche Hürde oder Schlüssel zum Erfolg?, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, 771-774. Münster: WTM Verlag.

SCHUKAJLOW, S., LEISS, D., PEKRUN, R., BLUM, W., MÜLLER, M., & MESSNER, R. (im Druck): Teaching Methods for Modelling Problems and Students' Task-specific Enjoyment, Value, Interest and Self-Efficacy Expectations, in: Educational Studies in Mathematics. doi: 10.1007/s10649-011-9341-2

SPIRO, R. J. / COULSON, R. L. / FELTOVICH, P. J. / ANDERSON, D. K. (1988): Cognitiv Flexibility Theory: Advanced knowledge Aquisition in Ill-Structured Domains. The tenth annual conference of the cognitive science society. Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum, 375–383.

SWELLER, J. (1994): Cognitive Load Theory, Learning Difficulty, and Instructional Design. Learning and Instruction, 4(4), 295–312.

TSAMIR, P. / TIROSH, D./ TABACH, M. / LEVENSON, E. (2010): Multiple Solution Methods and Multiple Outcomes – is it a task for Kindergarten Children?, in: Educational Studies in Mathematics, 73, 217–231.

WERTHEIMER, M. (1945/1964): Produktives Denken (2 ed.), Frankfurt am Main: Kramer.

WINTER, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, in: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, (61), 37–46.

WITTMANN, E. C. (1995): Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht - vom Kind und vom Fach aus, in: Müller, G. N. / Wittmann, E. C. (Hrsg.), Mit Kindern rechnen. Frankfurt a.M: Arbeitskreis Grundschule, 10–41.