Gruppentheorie

Mo/Do 8-10, M5

Lit: - D. Robinson, Springer
A course in the theory of gps
- Rotman, Springer
Group theory
- Lyndon, Schupp, Springer
Combinatorial Gp Theory
- Magnus, Karrass, Solitar,
Combinat. Gp. Thy, Dover
- P. de la Harpe
Topics in Geom. Gp Theory

Ziel: Kombinatorische und geom. Gp.th. wie sie in Algebra, Topol., Geom., Modellth. etc gebraucht wird. Fragestellung häufig durch Anwendungen in der Topol. motiviert.

Voraus: Algebra I.

§1 Konstruktion von Gruppen

1. Permutationsgr. und Wirkungen

Sei X eine nichtleere Menge. Die Symmetrische Gruppe $Sym(X) = \{ f : X \to X \mid f \text{ bij.} \}$ ist bzgl der Komposition von Abb. eine Gruppe.

Ist X endl., gilt $|Sym(X)| = |X|!$ (ÜA) und wir schreiben auch S_n, falls $|X| = n$.
Wenn $f \in Sym(X)$ genau zwei Elte $u, v \in X$ vertauscht und alle anderen fixiert, heißt f Transposition.
Ist X endl., dann ist jedes $g \in Sym(X)$ Prod. von Transpositionen (ÜA).
Die Alternierende Gruppe $Alt(X)$ besteht aus allen $g \in Sym(X)$, die sich als Produkt einer geraden Anzahl von Transpos. schreiben lassen.
Ist X endlich, $|X| \geq 2$, dann ist $[Sym(X) : Alt(X)] = 2$
Wir schreiben auch A_n falls $|X| = n$.

In jeden Fall ist $Alt(X)$ ein <u>Normalteiler</u> in $Sym(X)$, $Alt(X) \trianglelefteq Sym(X)$.
Die Untergruppen von $Sym(X)$ heißen auch <u>Permutationsgruppen</u> auf X.
<u>Allgemeiner:</u> Ist G eine Gr., $\varphi : G \to Sym(X)$ ein Homom., dann sagt man, dass G (durch φ) auf X operiert. Wir schreiben

$$\varphi : G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g(x)$$

Die Menge $G(x) = \{ g(x) \mid g \in G \}$ heißt <u>Bahn</u> oder <u>Orbit</u> von x unter G. Die Bahnen partitionieren X in disjunkte Teilmengen.
Gilt $G(x) = X$ für ein (und damit jedes) $x \in X$, dann sagt man, dass G transitiv auf X operiert.

D.h. für $u, v \in X$ ex ein $g \in G$ mit $g(u) = v$.

Der <u>Stabilisator</u> von $x \in X$ ist die Untergruppe

$$G_x = \{ g \in G \mid g(x) = x \}.$$

<u>Beobachtung</u> Für jedes $x \in X$ ist die Abb.

$$G/G_x \longrightarrow G(x), \quad gG_x \mapsto g(x) \qquad \text{eine Bij.}$$

<u>Bew</u>: Es ist $g(x) = h(x) \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow gG_x = hG_x$,
also ist die Abb. wohldef. und inj. Surj ist klar.

Eine Wirkung heißt <u>treu</u>, wenn $\varphi : G \to \mathrm{Sym}(X)$ inj. ist, d.h. falls $\ker \varphi = \{1\}$

Eine Wirkung heißt <u>frei</u>, wenn aus $g(x) = x$ für ein $x \in X$ schon folgt $g = id$, d.h. falls $G_x = \{1\}$ für alle $x \in X$.

Offensichtl. sind freie Wirkungen treu.

Verfeinerungen der symmetrischen Gr.

<u>Bsp</u>: (i) Isometriegr. (X, d) metr. Raum

(ii) Autom.gr., zB. $X = G$ Gr., $X = K$ Körper etc.

Erinnerung an die Isomorphie-Sätze

1. <u>Isom.-Satz</u>: Ist $\varphi : G \to H$ surj., dann ist $G/\ker\varphi \cong H$. Allg. für jeden Homom. $\varphi : G \to H$ gilt $G/\ker\varphi \cong \mathrm{im}\, \varphi$.

2. <u>Isom.-Satz</u>: Ist $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$, dann ist

$$H/(N \cap H) \cong NH/N.$$

Weitere Beispiele

c) Ist $H \leq G$, $X = H\backslash G$, dann ist

$\rho: G \to \mathrm{Sym}(X),\ g \mapsto (Hx \mapsto Hxg)$ eine trans. Rechtswirkung mit $\ker \rho = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$. (Denn ist $h \in \ker\rho$, dann ist $Hx = Hxh$ für alle $x \in G$, d.h. $h \in x^{-1}Hg$ für alle $x \in G$.)

Für den Spezialfall $H = \{1_G\}$ ist diese Darstellung gerade die rechtsreguläre Darstellung von G auf sich selbst.

Für die entsprechende Linkswirkung müssen wir def. $\lambda: G \to \mathrm{Sym}\, G/H,\ g \mapsto (xH \mapsto g^{-1}xH)$

damit λ ein Homom. ist.

Diese Bsp. sind besonders wichtig, da sich jede (bel.) trans. Perm.darst. als Rechtswirk. auf gew. Rechtsnebenklassen darstellen lässt.

Def 1.3 Zwei Perm.darst. von G auf X bzw Y heißen äquiv., wenn es eine Bij. $f: X \to Y$ gibt, so dass für alle $g \in G$, $x \in X$ gilt $f(g(x)) = g(f(x)) \in Y$.

Lemma 1.4 Ist G trans. auf X (in Rechtswirkung). Dann ist für $x \in X$ die Perm.darst. von G auf X äquiv. zur Rechtswirkung auf $G_x\backslash G$.

Bew. Mit $f: X \to G_x\backslash G$, $f(y) = G_x g$ falls $x^g = y$, gilt $f(x^g) = (f(x))^g = G_x g$.

Bem (Satz von Cayley) Jede Gr. ist isom. zu einer Ugr. von $\mathrm{Sym}(G)$, etwa durch rechtsreg. Wirkung.

Weiteres wichtiges Bsp

d) Ist G eine Gr., so ist $\mathrm{Aut}(G) \leq \mathrm{Sym}(G)$

$\kappa : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $(g \mapsto \kappa_g : h \mapsto g^{-1} h g)$

die Konjugationsdarstellung von G auf sich selbst

Es ist $\ker \kappa = Z(G) = \{ g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in G \}$

das <u>Zentrum</u> von G

und $G_g = \mathrm{Cen}(g) = \{ h \in G \mid hg = gh \}$

der <u>Zentralisator</u> von $g \in G$

<u>Erinnerung</u>: Ist G eine Gr., $X \subseteq G$ eine Teilm., dann bezeichnet $\langle X \rangle$ die von X in G erz. Ugr., d.h. die kleinste Ugr. von G, die X enthält.

Es ist $\langle X \rangle = \bigcap \{ H \leq G \mid X \subseteq H \}$.

Jedes Elt $g \in \langle X \rangle$ ist ein endl. Prod. der Form

$g = x_1 \dots x_m$ mit $x_i \in X \cup X^{-1}$, wobei

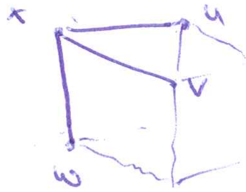
$X^{-1} = \{ x^{-1} \mid x \in X \}$.

Eine Gr. G heißt <u>endl. erz.</u>, wenn es eine endl. Teilm. X gibt mit $\langle X \rangle = G$ und zyklisch, falls $|X| = 1$ gewählt werden kann.

3. Isom-Satz Sind $M, N \trianglelefteq G$, $N \le M$, dann ist

$$(G/N)/(M/N) \cong G/M .$$

2. Bsp a) Sei G die Symmetriegruppe eines Würfels. Dann operiert G auf der Menge X der Ecken des Würfels. Diese Wirkung ist trans. und treu. Für eine Ecke $x \in X$ operiert der Stab. G_x treu auf den benachbarten Ecken $\{u, v, w\}$ und induz. dort $\mathrm{Sym}\{u,v,w\}$, also $|G_x| = 6$. Daher folgt wegen



$$|G| = |G_x| \cdot |X| \quad \text{also} \quad |G| = 48 .$$

b) Sei $n \ge 2$, $X = \{1, \dots, n\}$. Sei $g \in \mathrm{Sym}(X)$, $g(i) = \begin{cases} i+1, & i < n \\ 1, & i = n \end{cases}$

Dann operiert die von g erz. zykl. Gr. $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}/n$ frei und trans. auf X.

3. Lemma: Sei G trans. auf X (bzgl. einer geg. Wirk.) Eine Ugr. $H \le G$ oper. genau dann trans. auf X, wenn für ein (und damit jedes) $x \in X$ gilt $G = HG_x$.

Bew: Ist H trans., dann ex für jedes $x \in X$, $g \in G$ ein $h \in H$ mit $h(x) = g(x)$, d.h. $h^{-1} g \in G_x$, also $g \in hG_x \subseteq HG_x$.

Ist umgekehrt $G = HG_x$, $y \in X$ bel., dann ex $g \in G$ mit $g(x) = y$. Dann ex $h \in H$ mit $g \in hG_x$, also $h(x) = y$ und H trans.

Bem: Ist G trans. auf X und $N \trianglelefteq G$ Norm.teiler mit $N \le G_x$ für ein $x \in X$, dann liegt N im Kern der Wirkung. (ÜA)

4. <u>Def:</u> Angenommen, G oper auf X und auf Y. Eine Abb. $\rho : X \to Y$ heißt G-äquiv., wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle id_G \times \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ G \times Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

kommutiert,

d.h. falls $g(\rho(x)) = \rho(g(x))$. Die Wirkungen heißen dann äquivalent.

<u>Bsp:</u> (a) Die kanon. Abb. $G/G_x \to G_x$, $gG_x \mapsto g(x)$ ist äquiv.

b) G Symmetriegr. des Würfels, X Eckenmenge, Y Menge der 4 Würfeldiagonalen. Durch jede Ecke x geht genau eine Diagonale. Die Abb $X \to Y$, die jeder Ecke ihre Diagonale zuordnet ist äquiv., aber nicht inj.

5. <u>Def:</u> Eine Ugr. $H \leq G$ heißt maximal, wenn H echte Ugr. ist $(H \neq G)$ und es keine echten Ugr. gibt, die H enthalten, d.h. $H \leq K \leq G \Rightarrow K = H$ oder $K = G$.

Eine transitive Wirkung heißt primitiv, wenn ein (und damit jeder) Stabilisator maximal ist.

<u>Bem:</u> Sei G prim. auf X (also insbes. trans.) via φ. Dann gilt

(i) $|X| \geq 2$, denn $G_x \neq G$.

(ii) Ist $N \trianglelefteq G$ NT, dann ist entweder $N \leq \operatorname{Ker}\varphi$ oder N ist trans.

1.7. Lemma: Sei $G \times X \to X$ trans. $G \curvearrowright X$, $|X| \geq 2$.
Dann sind äquiv.
(i) G_x ist max., d.h. die Wirkung ist primitiv.
(ii) für jede G-äquiv. Abb. $p: X \to Y$ gilt
p ist entweder konst oder inj.

Bew: Ist $p: X \to Y$ äquiv., $x \in X$, so folgt $G_{p(x)} \supseteq G_x$.
Wenn G_x max., folgt also $G_{p(x)} = G_x$ oder $G_{p(x)} = G$,
d.h. p ist entweder inj. oder konst.
Wenn G_x nicht max ist, ex $G_x \subsetneq H \subsetneq G$. Setze $Y = G/H$
und $p(g(x)) = gH$. Diese Abb ist äquiv., nicht
konst. (weil $H \neq G$) und nicht inj. (weil $G_x \neq H$).

1.8 Def Sei $|X| \geq 2$. Eine Wirkung $G \times X \to X$ heißt 2-fach
trans., wenn G trans. auf Paaren (u, v) mit $u \neq v$
in X oper.; d.h. G trans. auf $(X \times X) \setminus \Delta(X)$.

1.9 Lemma Jede 2-fach trans. Wirkung ist prim.
Bew: Klar nach Lemma 6: Angen. $p: X \to Y$ ist äquiv,
$u \neq v \in X$, $p(u) = p(v)$. Zu jedem $w \neq v$ ex $g \in G_u$
mit $g(v) = w$, also $p(w) = p(v)$, d.h. p konst.

1.9. Def. Sei G eine Gr., $a, b \in G$
Wir def. den Kommutator $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$.
Die Kommutatorgr. $[G,G] = G' = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle$ ist die
von allen Kommutatoren erz. Untergr. von G.
Vorsicht: Nicht jedes Elt. der Kommutatorgr.
ist ein Kommutator! Bsp

Universelle Eigenschaft des Kommutatorgs.

(i) $[G,G] \trianglelefteq G$

(ii) $G/[G,G] = G_{ab}$ ist abelsch.

G_{ab} heißt die Abelianisierung von ~~G~~ G.

(iii) $[G,G]$ ist ~~die~~ kleinste Ugr. mit dieser Eigenschaft:

Ist $\varphi : G \to A$ ein Gruppenhom., A abelsch, dann fakt. φ eindeutig durch G_{ab}, d.h. es ex eind. Hom. ψ mit

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & A \\ & G_{ab} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

, also $[G,G] \leq \ker \varphi$.

Eine Gruppe heißt <u>perfekt</u>, wenn $G = [G,G]$ gilt, d.h. wenn G keine nichttriv. ab. Quotienten hat.

<u>Bsp:</u> $\mathrm{Alt}(X)$ für $|X| \geq 5$ ist perfekt.

1.10 <u>Def</u> Eine Gr. G heißt <u>einfach</u>, wenn $\{1\}$ und G die einzigen Normalteiler von G sind. Oder, äquiv, daß, jeder Gr.hom. $G \xrightarrow{\varphi} H$ ist entweder konstant oder inj. (vgl. prim. Wirk.)

1.11. <u>Lemma</u>: Ist G einf. und abelsch, dann ist $G = \{1\}$ oder $G \simeq \mathbb{Z}/p$, p prim. Insbes. G endlich.

<u>Bew</u>: In einer ab. Gr. ist jede Ugr. ein NT. Also ist für $g \in G \setminus \{1\}$ schon $\langle g \rangle = G$. Ist die Ordn. von g keine Primzahl, dann ist $\langle g^k \rangle$ für $k \mid |G|$ eine Ugr. Ist $G \simeq \mathbb{Z}$, dann ist $k\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ nicht einfach.