Bem: Die endlichen einf. Gr. sind klassifiziert:

- ab. Gr. $\mathbb{Z}/p$
- alt. Gr. $Alt(X)$, $5 \leq |X|$
- klassische Gr. ($PSL_n(\mathbb{F}_q)$ etc.) über endl. Körpern
- Gr. vom Lie-Typ ($E_6, \dots$)
- 26 'sporadische' Gruppen.

Für andere Klassen von Gr. sind die einf. Gr. ebenfalls klassifiz., als Bausteine aller Gr.
zB. Liegp, alg. Gr. etc.

1.13. Def: Eine Gr. heißt auflösbar, falls $G^{(k)} = \{1\}$ für ein $k \geq 0$ gilt wobei $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = [G, G]$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$.

Eine Gr. heißt nilpotent, falls $G^{[k]} = \{1\}$ wobei $G^{[0]} = G$, $G^{[1]} = [G, G]$, $G^{[i+1]} = [G, G^{[i]}]$, wobei $[G, H] = \langle [a, b] \mid a \in G, b \in H \rangle$

Bsp: (i) Jede nilp. Gr. ist auflösbar

(ii) Jede ab. Gr. ist nilp.

(iii) Sei K ein Körper, $G = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ & c \end{pmatrix} \in K_{2\times 2} \mid ac \neq 0 \}$.

$G^{(1)} = [G, G] = \{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ & 1 \end{pmatrix} \mid c \in K \} \simeq (K, +)$

BC $G^{(2)} = \{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \}$.

1.14 Lemma: Eine Gr. G ist genau dann auflösbar, wenn es eine Folge von Ugr. $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$ gibt mit G_i / G_{i-1} ab.

Bew: "⇒" $G/[G, G]$ ist ab., $[G, G] \trianglelefteq G$

"⇐" Es ist $G^{(i)} \leq G_{n-i}$, also $G^{(n)} = \{1\}$.

Kor: Epim. Bilder und Ugr aufl. Gr. sind auflösbar
nilp. nilp.

1.15 Lemma: Eine Gr. G ist nilpotent genau dann wenn

(i) es eine aufst. Zentralreihe gibt

$$1 = \zeta_0 G \leq \zeta_1 G \leq \dots \leq \zeta_n G = G$$

wobei $\zeta_{k+1} G / \zeta_k G = Z(G/\zeta_k G)$

(ii) es eine aufst. Reihe von ~~NT~~ Gr. gibt

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_m = G$$

mit $H_{n+1}/H_n \leq Z(G/H_n)$ für $n = 0, \dots, m-1$.

Bew: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) denn $\zeta_k G \trianglelefteq G$

G nilp. $\Rightarrow$ $G^{[k]} = \{1\}$ für ein k, also $G^{[k-1]} \leq Z(G)$.

Wegen $G^{[k-1]} \trianglelefteq G$ ist $G^{[k-2]}/G^{[k-1]} \leq Z(G/G^{[k-1]})$.

Ind. folgt die Beh.

Umgekehrt folgt wegen $H/[G,H] \leq Z(G/[G,H])$, $H \trianglelefteq G$

aus (i), dass G nilp. ist, denn

$G^{[k-i]} \trianglelefteq G^{[k-i+1]} \trianglelefteq G^{[k+2-i]}$ etc erfüllt (i)

Bem: Der Beweis von 1.14 zeigt, dass $G^{[i]}$ die am schnellsten abst. Zentralreihe und $\zeta_i G$ die am schnellsten aufsteigende Zentralreihe ist.

1.16 Kor Wenn eine nilp. Gr. G treu + prim. auf X operiert, genau dann ist $|G| = |X| = p$ prim und die Wirkung reg.

(11b: G trans. auf X, $N \trianglelefteq G$ reg., dann ist Wirkung von G_x auf X äquiv. zu Konj. auf N)

Bew: Es ist $Z(G)$ reg. und trans. auf X.

Damit ist für $x \in X$ der Stabilisator G_x ein Komplement von $Z(G)$, d.h. $G = Z(G) G_x$ mit $Z(G) \cap G_x = 1$.

Wir können $Z(G)$ mit X identifiz., dann operiert G_x auf $X = Z(G)$ durch Konj. trivial, also $G_x = 1$.

<u>Einschub</u> Wiederholung Semidir. Produkte

a) Sei G eine Gr., $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$ NT mit $H \cap N = \{1\}$, $NH = G$. Dann ist die Abb

$$\varphi : N \times H \to G, \quad (n, h) \longmapsto nh$$

bij. ($n_1 h_1 = n_2 h_2 \iff n_2^{-1} n_1 = h_2 h_1^{-1} \in H \cap N = \{1\}$
$\iff n_2 = n_1, h_2 = h_1$.)

aber i.a <u>kein</u> Gr.homom, denn es ist

$$(n_1 h_1)(n_2 h_2) = (n_1 \underbrace{h_1 n_2 h_1^{-1}}) (h_1 h_2)$$

<u>Bem</u>: $\varphi : N \times H \to G$ ist genau dann ein Gr.homom., wenn $H \trianglelefteq G$ und daher $G = N \times H$.

b) Sind H, N Gr., $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homom., so def. eine Verknüpfung auf $G = N \times H$ durch

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) := (n_1 \, \varphi(h_1)(n_2), h_1 h_2)$$

(in a) ist φ die Konjug.wirk.) Damit wird G zu einer Gr. mit Ugr. $\{1\} \times H \simeq H$ und Normalteiler $N \times \{1\} \simeq N$. Man schreibt

$$G = N \rtimes H = N \rtimes_{\varphi} H.$$

1.16 <u>Lemma</u> Sei $G \curvearrowright X$ trans., $N \trianglelefteq G$ reg. NT. Dann ist $G = N \rtimes G_x$ für $x \in X$ und die Wirkung von G_x auf X äquivalent zur Konj.wirkung von G_x auf N.

<u>Bew</u>: Die Abb $\varphi_x : N \to X$, $g \mapsto g(x)$ ist G_x-äquivariant, denn es ist

$$\varphi_x(g^h) = (h^{-1} g h)(x) = h(g(h^{-1}(x)))$$
$$= h(g(x)) = \cancel{(gh)(x)}$$
$$= h(\varphi_x(g)).$$

1.17 <u>Satz</u>: Sei G eine Gr., $N \trianglelefteq G$. Dann gilt

G ist aufl. gdw G/N und N aufl. sind.

<u>Bew</u>: Ist G aufl., dann sind G/N und N aufl. nach Kor. 1.13. Sind G/N und N auflösbar, so erhalten wir durch Kompos. Faktorreihe für G.

<u>Achtung</u>: Das entsprechende gilt <u>nicht</u> für nilp. Gr! Man braucht für $N \trianglelefteq G$, dass N und $G/[N,N]$ nilp. sind. (Satz von Hall)

<u>Bem</u>: Eine aufl. Gr., die perfekt ist, ist trivial.

1.18 <u>Satz</u> (Iwasawa) Sei $G \curvearrowright X$ eine prim. Wirkung. Sei G perfekt und $A \trianglelefteq G_x$ ein aufl. NT mit

$G = \langle g^{-1} A g \mid g \in G \rangle$. Dann liegt jedes echte Normalteiler im Kern der Wirkung. Falls G treu operiert, ist G also eine einf. Gr.

<u>Bew</u>: Angenommen, $N \trianglelefteq G$, $N \not\subseteq G_x$. Zeige $N = G$.
Sei $H = NA$. Dann ist $H \trianglelefteq G$, denn es ist $G = NG_x$ und für $g = nj \in G$ mit $n \in N$, $j \in G_x$ ist

$$\cancel{(nj)^{-1} NA\, nj = j^{-1} n^{-1} N}$$

$$(jn)^{-1} NA\, jn = n^{-1} j^{-1} NA\, jn = n^{-1} \underbrace{N}_{N} \underbrace{j^{-1} A j}_{A} n$$

$$= ANn = AN.$$

Wegen $G = \langle A^g \mid g \in G \rangle \leq \langle H^g \mid g \in G \rangle = H$ ist $G = NA$. Nach Isom.satz ist

$$G/N = NA/N \cong A/A \cap N \text{ aufl.}$$

Weil G perf. ist, ist auch G/N perf., also

$G/N = \{1\}$ nach Vorbem. $\square$

Dieser Satz ist ein wichtiges Kriterium, um die Einfachheit von Gr. wie $PSL_n(K)$, $PSp_{2n}(K)$ etc zu zeigen. Wir beweisen damit die Einfachheit von $\mathrm{Alt}(X)$, $|X| \neq 4$.

<u>Anwendung</u> $\mathrm{Alt}(X)$, $|X| \neq 4$.

Für $g \in \mathrm{Sym}(X)$ ist der Träger $\mathrm{supp}(g) = \{x \in X \mid g(x) \neq x\}$

Offensichtlich operiert $\langle g \rangle$ auf $\mathrm{supp}(g)$ (und lässt $X \setminus \mathrm{supp}(g)$ elementw. fest). Ist also $\mathrm{supp}(g)$ endlich, dann hat g endl. Ordnung. Insbesond. hat jedes $g \in \mathrm{Alt}(X)$ endl. Ordnung und es gilt

$|\mathrm{supp}(g)| = 2$ oder g Transposition

$|\mathrm{supp}(g)| = 3 \Rightarrow |\langle g \rangle| = 3$, d.h. wenn g ein 3-Zykel ist $g = (x\ y\ z)$

1.20 <u>Lemma</u> Jeder 3-Zykel liegt in $\mathrm{Alt}(X)$. Ist $|X| \geq 3$, dann wird $\mathrm{Alt}(X)$ von 3-Zykeln erzeugt.

<u>Bew</u> ÜA.

<u>Kor:</u> Für $|X| \geq 5$ ist $\mathrm{Alt}(X)$ perfekt.

<u>Bew:</u> $[(a,b,x),(a,c,y)] = (a\ b\ c)$, a,b,c,x,y pw. versch.

1.20 <u>Lemma:</u> Für $|X| \geq 3$, $m \leq |X| - 2$ operiert $\mathrm{Alt}(X)$ m-fach trans. auf X (d.h. trans. auf m-Tupeln von pw. versch. Elementen.), oder, äquiv., G_x oper. $(m-1)$-fach trans. auf $X \setminus \{x\}$.

<u>Bew:</u> Klar für $m=1$, $|X| \geq 3$: $Alt(X)$ operiert trans. auf X. Der Stab. $Alt(X)_x$ für $x \in X$ enthält $(=)$ $Alt(X \setminus \{x\})$ und operiert mind. $(m-1)$-fach trans auf $X \setminus \{x\}$.

<u>Kor</u> $Alt(X)$ oper. prim. auf X für $|X| \geq 3$.

<u>Bew:</u> Für $|X| \geq 4$ folgt das aus Lemma 1.9.
Für $|X| = 3$ ist $Alt(X) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, prim, nach 1.15.

1.21 <u>Lemma:</u> Ist $|X| = 5$, dann ist $Alt(X)$ einfach (der Ordnung 60, die kleinste nicht ab. einf. Gr. Jede Gr. der Ordnung < 60 ist auflösbar.).

<u>Bew:</u> $Alt(X)$ ist prim. auf X und perfekt. Der Stabil. von $x \in X$ ist enthalten in der auflösb. Gr. $Sym(X \setminus \{x\}) \simeq S_4$. Jeder 3-Zykel liegt in solch einem Stabil., also erzeugen diese Stabil. $Alt(X)$. Nach Iwasawa ist $Alt(X)$ einf.

1.22 <u>Satz:</u> Ist $|X| \neq 4$, dann ist $Alt(X)$ einfach, $|X| \geq 2$

<u>Bew.</u> Klar für $|X| = 2$, $Alt(X) = \{1\}$, $|X| = 3$: $Alt(X) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Für $5 \leq |X|$ endlich induktiv.
Für $x \in X$ ist $Alt(X)_x \simeq Alt(X \setminus \{x\})$, denn
$[Alt(X) : Alt(X)_x] = m = [Alt(X) : Alt(X \setminus \{x\})]$.
Ist $1 \neq N \trianglelefteq Alt(X)$ ein NT, dann ist entweder
$N \cap Alt(X)_x = \{1\}$, weil $Alt(X)_x$ einfach
<u>oder:</u> $Alt(X)_x < N = Alt(X)$, weil $Alt(X)$ primitiv
Ist $N \cap Alt(X)_x = \{1\}$, dann ist nach Lemma 1.16 N reg. und die Wirkung von $Alt(X \setminus \{x\})$ auf X

äquiv. zur Konj.wirkung auf N.

Für $|X| \geq 6$ ist $Alt(X \setminus \{x\})$ 3-fach trans.

auf $N\setminus\{1\}$ durch Konj. Das ist unmöglich:

Für $u, v \in N\setminus\{1\}$ hält der Stabil. von u, v

auch $u \cdot v$ fest, ist also <u>nicht</u> trans. auf

$N \setminus \{1, u, v\}$.

<u>Bem</u>: Ist $G = N \rtimes H$, H trans. durch Konj. auf

$N\setminus\{1\}, |N| \geq 2$, dann haben alle Elte von $N\setminus\{1\}$

dieselbe Ordnung.

Ist H 2-fach trans. auf $N\setminus\{1\}$, dann

ist $N \simeq \bigoplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (ÜA), denn für $u \in N\setminus\{1\}$

ist der Stab. von u trans. auf $N\setminus\{1, u\}$.

Weil mit u aber auch u^{-1} fixiert wird,

folgt $u = u^{-1}$, d.h. jedes Elt von $N\setminus\{1\}$ hat

Ordnung 2.

Ist nun X unendl. Menge, $1 \neq N \trianglelefteq Alt(X)$,

sei $g \in Alt(X)$, $n \in N\setminus\{1\}$, $Y \subseteq X$ endlich mit

$|Y| \geq 5$, $supp(g) \cup supp(n) \subseteq Y$. Dann ist

$Alt(Y) \subseteq N$, da $Alt(Y)$ einf. und $g \in Alt(Y)$,

also $N = Alt(X)$.