äquiv. zur Konj. wirkung auf $N$.
Für $|X| \geq 6$ ist $Alt(X \setminus \{x\})$ 3-fach trans. auf $N$ durch Konj. Das ist unmöglich:
Für $u, v \in N \setminus \{1\}$ hält der Stabil. von $u, v$ auch $u \cdot v$ fest, ist also nicht trans. auf $N \setminus \{1, u, v\}$.

Bem: Ist $G = N \rtimes H$, $H$ trans. durch Konj. auf $N \setminus \{1\}$, $|N| \geq 2$, dann haben alle Elte von $N \setminus \{1\}$ dieselbe Ordnung.
Ist $H$ 2-fach trans. auf $N \setminus \{1\}$, dann ist $N \simeq \bigoplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (ÜA), denn für $u \in N \setminus \{1\}$ ist der Stab. von $u$ trans. auf $N \setminus \{1, u\}$. Weil mit $u$ aber auch $u^{-1}$ fixiert wird, folgt $u = u^{-1}$, d.h. jedes Elt von $N \setminus \{1\}$ hat Ordnung 2.

Ist nun $X$ unendl. Menge, $1 \neq N \trianglelefteq Alt(X)$, sei $g \in Alt(X)$, $n \in N \setminus \{1\}$, $Y \subseteq X$ endlich mit $|Y| \geq 5$, $supp(g) \cup supp(n) \subseteq Y$. Dann ist $Alt(Y) \subseteq N$, da $Alt(Y)$ einf. und $g \in Alt(Y)$, also $N = Alt(X)$.

1.24 Satz: Sei $G$ eine Gr., $H \leq G$ Ugr. mit $[G:H] = n$, $1 < n < \infty$. Dann hat $G$ einen Normalteiler $N$ mit $[G:N] \leq n!$. Ist $G$ perfekt, dann ist $[G:N] \leq \frac{n!}{2}$.
Insbesondere gilt: Wenn $G$ eine echte Ugr. von

endl. Index hat, dann auch einen echten NT von endl. Index

<u>Bew:</u> $G$ operiert auf $X = G/_H$, $|X| = n$, d.h. $\varphi: G \to \mathrm{Sym}(X)$ ist Homom. mit $\ker\varphi \trianglelefteq G$ und $\mathrm{im}\,\varphi/_{\ker\varphi} \leq \mathrm{Sym}(X)$. Ist $G$ perf., dann ist $\mathrm{im}\,\varphi \leq \mathrm{Alt}(X)$, denn jeder Kommutator ist Prod. einer geraden Anzahl von Transp.

<u>Kor:</u> Ist $|X| \geq 5$ und $1 < k < |X|$, $k$ endl., dann hat $\mathrm{Alt}(X)$ keine Ugr. vom Index $k$. Insbes. kann $\mathrm{Alt}(X)$ ~~1.25 Lemma~~ nicht auf einer Menge $Y$ mit $|Y| < |X|$ nicht-triv. oper.

<u>Bew:</u> $|G/G_v| = |G(v)| < |X|$

Wir betrachten jetzt noch $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}(X))$ für $X$ endl.

1.25 <u>Def</u> Für eine Gr. $G$ ist $\mathrm{Inn}(G) = \{k_g \mid g \in G\}$ die Gruppe der <u>inneren Autom.</u> von $G$

<u>Bem:</u> Es ist $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$, $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$.

(Bew: Für $k_g \in \mathrm{Inn}(G)$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ist

$$k_g^{\varphi}(a) = \varphi^{-1} k_g \varphi(a) = \varphi^{-1}(g^{-1}\varphi(a)g) = \varphi^{-1}(g^{-1})\, a\, \varphi^{-1}(g)$$
$$= k_{\varphi^{-1}(g)}(a)$$

Also $k_g^{\varphi} \in \mathrm{Inn}(G)$.

Es heißt $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G) =: \mathrm{Out}(G)$ die Gr. der <u>äußeren Autom.</u> von $G$.

1.26 <u>Lemma</u> Ist $G$ eine Gr. mit $Z(G) = 1$, dann ist $G \cong \mathrm{Inn}(G)$ und $Z(\mathrm{Aut}(G)) = 1$.

<u>Bew:</u> Der Homom. $k: G \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto k_g$ ist inj., denn ist $k_g = k_h$, dann gilt $a^g = a^h$ für alle $a \in G$, also $a^{gh^{-1}} = a$ $\forall a \in G$, d.h. $gh^{-1} \in Z(G) = 1$.

Ist $\alpha \in Z(\mathrm{Aut}(G))$, dann gilt für alle $g \in G$
$\kappa_g \alpha = \alpha \kappa_g$, d.h. für alle $a \in G$ gilt
$\alpha(a^g) = \alpha(a)^{\alpha(g)} = \alpha(a)^g$
Weil $\kappa$ inj. ist folgt $\alpha(g) = g$ für alle $g \in G$,
d.h. $\alpha = \mathrm{id}$

Damit erhalten wir einen Autom. turm

$$G_0 = G \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_i \trianglelefteq \dots$$

mit $G_i = \mathrm{Aut}(G_{i-1})$.

<u>Satz</u> (Wieland) Ist $G$ endl., dann ex $i$ mit $G_i \simeq \mathrm{Aut}(G_i)$
d.h. alle Autom. von $G_i$ sind innere Autom.
Eine solche Gr. $G$ mit $G \simeq \mathrm{Aut}(G)$ heißt vollständig.
Wir betrachten einen 'kurzen' Turm, d.h. wir werden zeigen: $\mathrm{Alt}(X) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}(X)) = \mathrm{Sym}(X) = \mathrm{Aut}(\mathrm{Sym}(X))$

Es gilt allgemein:

<u>Satz</u> (Burnside) Ist $G$ eine einf. nichtab. Gr., dann ist
$\mathrm{Aut}\, G$ vollst.

Hier nur für $G = \mathrm{Alt}(X)$, $|X| \geq 9$.

1.27 <u>Lemma</u>: Ist $|X| \geq 3$, $a, b \in X$, $a \neq b$, dann erzeugen
schon die 3-Zykel $g$ mit $\mathrm{supp}(g) = \{a, b, x\}$, $x \in X \setminus \{a,b\}$
die Gr. $\mathrm{Alt}(X)$.

<u>Bew</u>: Es ist $(a\ b\ x)(a\ b\ y) = (y\ b)(a\ x)$

1.28 <u>Lemma</u>: Sei $X$ endlich, $|X| = m \geq 9$, $|Y| = m-1$.
Ist $H \leq \mathrm{Alt}(X)$ eine Ugr, $H \simeq \mathrm{Alt}(Y)$, dann ist
$H = \mathrm{Alt}(X)_x$ für ein $x \in X$.

Bew: 1. Schritt: Ist $h \in H$ ein 3-Zykel bzgl $H \curvearrowright Y$, $\mathrm{supp}_H(h) = 3$, dann ist $h$ auch 3-Zykel bzgl $H \curvearrowright X$.

Bew: Sei $\mathrm{supp}_Y(h) = \{y_1, y_2, y_3\} \subseteq Y$, sei

$K = \mathrm{Alt}(Y \setminus \{y_1, y_2, y_3\}) \leq H$, also $[h, K] = 1$.

Für jedes $v \in X$ gilt entweder $K(v) = \{v\}$ oder

$|K(v)| \geq m-4$ nach Kor. 1.24

Da $K$ treu auf $X$ operiert, ex eine $K$-Bahn

$K(v) = X_1 \subseteq X$ mit $|X_1| \geq m-4$. Dann ist $|X \setminus X_1| \leq 4$

und $K$ fixiert jedes Elt in $X \setminus X_1$. Für $w \in X \setminus X_1$

ist dann $Kh(w) = hK(w) = h(w)$, d.h. $h(X \setminus X_1) = X \setminus X_1$

denn $[h, K] = 1$.

Daher ist $h(X_1) = X_1$.

Beh: Für alle $w \in X_1$ ist $h(w) = w$.

Sonst wäre ~~khwa~~ für $w = k(v)$ nämlich

$k\, h(v) \neq k(v)$, also $h(w) \neq w$ für alle $w \in X_1$.

Dann zerfällt $X_1$ in $|X_1|/3$ $\langle h \rangle$-Bahnen, auf

denen $K$ trans. op. $\lightning$ $1 < |X_1|/3 < m-4$, Kor 1.24.

Daher ist $\mathrm{supp}_X(h) \subseteq X \setminus X_1$. Wegen $\langle h \rangle \cong \mathbb{Z}/3$ und

$|X \setminus X_1| \leq 4$ folgt $|\mathrm{supp}_X(h)| = 3$.

2. Schritt: Sind $p, q \in \mathrm{Alt}(X)$ 3-Zykel, dann ist

$|\mathrm{supp}_X(p) \cap \mathrm{supp}_X(q)| = 2$ oder $\langle p, q \rangle \cong \mathrm{Alt}(4)$.

(ÜA) 4 Fälle

3. Schritt Sei $Y = \{a, b, y_1, \ldots, y_{m-3}\}$. Dann wird

$H$ von den $m-3$ 3-Zykeln $(a\, b\, y_i)$ erzeugt.

In ihrer Wirkung auf $X$ bewegen diese $m-3$ 3-Zykel höchstens $m-3+2 = m-1$ Elte (nach Schritt 2). Also hat $H$ einen Fixpkt $x \in X$, d.h. $H \subseteq \mathrm{Alt}(X)_x$. Da beide Gr. dieselbe Ord. haben, gilt $H = \mathrm{Alt}(X)_x$.

<u>Bem</u> Sind $K, L \trianglelefteq G$, dann ist $[K,L] \subseteq K \cap L$,

denn $[k,l] = \underbrace{k^{-1}\,\overbrace{l^{-1}\,k}^{\in L}\,l}_{\in K}$ ... $\in L \cap K$.

$$[k,l] = \underbrace{k^{-1} l^{-1} k}_{\in L}\, l, \qquad [k,l] = k^{-1}\,\underbrace{l^{-1} k\, l}_{\in K} \quad \in L \cap K.$$

1.29 <u>Satz</u> Ist $X$ endl., $|X| \geq 9$, dann ist
$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}(X)) = \mathrm{Sym}(X) \text{ und } \mathrm{Out}(\mathrm{Alt}(X)) \cong \mathbb{Z}/2.$$

<u>Bem</u> Auch richtig für $|X| = 4, 5, 7, 8$, aber <u>nicht</u> für $|X| = 6$.

<u>Bew</u>: Wegen $\mathrm{Alt}(X) \trianglelefteq \mathrm{Sym}(X)$ operiert $\mathrm{Sym}(X)$ auf $\mathrm{Alt}(X)$. Diese Wirkung ist treu, denn für $g \in \mathrm{Sym}(X)$, $h = (a\,b\,c) \in \mathrm{Alt}(X)$ ist $g^{-1} h g = (g(a)\, g(b)\, g(c))$. Wenn also $|X| \geq 3$ und $g$ mit allen 3-Zykeln vertauscht, dann ist $g = \mathrm{id}_X$.

Daher ist $\mathrm{Sym}(X) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}(X))$.

Nach Lemma 1.28 permutiert $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}(X))$ die Punktstab. von Pkten in $X$. Jeder Stabilisator hat genau einen Fixpkt. Damit erhalten wir Homom

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sym}(X) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}(X)) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathrm{Sym}(X) \end{tikzcd}$$

Es ist $\ker\varphi \cap \mathrm{Inn}(\mathrm{Alt}(X)) = 1$, nach Vorbem also $[\ker\varphi, \mathrm{Inn}(\mathrm{Alt}(X))] = 1$.

Für $g \in Alt(X)$, $\kappa \in \ker\varphi$ ist daher

$$\kappa \, \kappa_g \, \kappa^{-1} = \kappa_{\kappa^{-1}(g)} = \kappa_g \quad , \text{ also } \kappa = id_G$$

d.h. $\ker\varphi = 1$ und $Aut(Alt(X)) = Sym(X)$, wobei $Sym(X)$ durch Konjug. operiert.

1.30 Satz Für $|X| \geq 9$, $X$ endl. ist $Sym(X)$ vollst.

Bew: Jeder Autom. von $Sym(X)$ lässt $Alt(X)$ inv,
denn es ist $[Sym(X) : Alt(X)] = 2$ und $Alt(X)$ einf.
Daher haben wir Epimorph.

$$\varphi : \quad Aut(Sym(X)) \longrightarrow Aut(Alt(X)) = Sym(X)$$

$\varphi$ ist Epim., weil $Inn(Sym(X)) \twoheadrightarrow Aut(Alt(X))$
nach Satz 1.29. Ist $\alpha \in \ker\varphi$, $\alpha \in Aut(Sym(X))$,
dann ist $\alpha|_{Alt(X)} = id$, also $Fix\,\alpha = Alt(X)$.

Daher ist für $x, y, u, v \in X$ $\alpha(x\,y)\alpha(u\,v)$

$$= \alpha((x\,y)(u\,v)) = (x\,y)(u\,v)$$

also $\alpha(x\,y) = (u\,v)$, $\alpha(u\,v) = (x\,y)$.

Wegen $|X| \geq 5$ gilt ebenso für $w \neq x, y, u, v$

$$\alpha((x\,y)(u\,w)) = (x\,y)(u\,w), \text{ also } \alpha(x\,y) = (u\,w) \lightning$$

Daher ist $\varphi$ ein Isom. und die Beh. bew.

## Die Sylow-Sätze

Wichtig in der endl. Gr.-Th., beispielhaft für die Art von Ergebnissen, die man sucht.
Beweis jetzt nicht mehr sehr kompliziert.

**1.31 Def** Sei $G$ eine endl. Gr., $p$ prim, $|G| = p^a \cdot m$ mit $(m,p) = 1$. Dann heißt ein Ugr. $H \leq G$ $p$-Sylowugr., falls $|H| = p^a$.

**1.32 Satz** Sei $G$ eine endl. Gr., $p$ prim, $|G| = p^a \cdot m$, $(m,p) = 1$. Dann gilt

(i) Jede $p$-Ugr. von $G$ ist in einer $p$-Sylowugr. enthalten. Insbesondere ex. $p$-Sylowugr. immer.

(ii) Wenn $n_p$ die Anzahl der $p$-Sylowugr. von $G$ bezeichnet, dann gilt $n_p \mid m$, $n_p \equiv 1 \mod p$

(iii) Alle $p$-Sylowugr. von $G$ sind konjugiert.

Bew: Sei $\mathcal{S} = \{X \subset G \mid |X| = p^a\}$. Dann ist

$$|\mathcal{S}| = n = \binom{p^a m}{p^a} = \frac{p^a m (p^a m - 1) \cdots (p^a m - p^a + 1)}{1 \cdot 2 \cdots (p^a - 1)\, p^a}$$

Offensichtlich operiert $G$ auf $\mathcal{S}$ durch Rechtsmultipl.

Beh: $p \nmid n$.

Betrachte $k_i := \dfrac{p^a m - i}{i}$, $1 \leq i \leq p^a$. Wenn $p^j \mid i$, dann ist $j < a$ und $p^j \mid p^a m - i$. Wenn $p^j \mid p^a m - i$, dann folgt $j < a$ und $p^j \mid i$. Daher sind $p^a m - i$ und $i$ durch dieselbe Potenz von $p$ teilbar und es folgt $p \nmid k_i$ und daher $p \nmid n$.

Daher ex eine $G$-Bahn $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$ mit $p \nmid |\mathcal{S}_1|$.

Wähle $X \in \mathcal{S}_1$ und setze $P = G_X$. Dann ist