Setze $h_{-1}: \mathbb{Z} \to X_0,\ 1 \mapsto 1$ und

$$h_n : X_n \to X_{n+1},\ (g_0, .. g_n) \mapsto (1, g_0, .. g_n).$$

Dann ist $d_{n+1} h_n (g_0, .. g_n) = d(1, g_0, .. g_n)$

$$= (g_0, .. g_n) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} (1, g_0, .. \hat{g}_j, .. g_n)$$

und

$$h_{n-1} d_n (g_0, .. g_n) = h\left(\sum (-1)^j (g_0, .. \hat{g}_j, .. g_n) \right)$$

$$= \sum (-1)^j (1, g_0, .. \hat{g}_j, .. g_n)$$

Daher ist $d_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n = id_{X_n}$.

Es ist $\varepsilon d_1 (g_0, g_1) = \varepsilon (g_0 - g_1) = 1 - 1 = 0$

Weil $\{(1, g_0, .. g_n) \mid g_i \in G\}$ X_{n+1} als G-Modul erz,

ist $X_{n+1} \subseteq im(X_n)$ unter h_n.

Daher genügt es z.z. $d_n d_{n+1} h_n = 0$ für $n > 0$.

Nach Ind.vor. sei $d_{n-1} d_n = 0$. Dann ist

$$d_n d_{n+1} h_n = d_n (1 - h_{n-1} d_n)$$

$$= d_n - (d_n h_{n-1}) d_n = d_n - (1 - h_{n-2} d_{n-1}) d_n$$

$$= h_{n-2} d_{n-1} d_n = 0.$$

Daher ist (X_n) ein freier $\mathbb{Z}G$-Komplex und die Exaktheit ebenfalls bewiesen. □

Manchmal benutzt man für die Darstellung des Kompl. eine andere Form, die sog. bar-Aufl.

Für den freien $\mathbb{Z}G$-Modul X_n wählen wir als Basis dann statt $(1, g_1, \dots, g_n)$

$$(1, g_1, g_1 g_2, g_1 \cdots g_3, \dots, g_1 \cdots g_n) =: [g_1 | g_2 | \dots | g_n]$$

In dieser Schreibweise ist dann

$$d([g_1 | \dots | g_n]) = g_1 [g_2 | \dots | g_n]$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1 | \dots | g_{i-1} | g_i g_{i+1} | \dots | g_n]$$
$$+ (-1)^n [g_1 | \dots | g_{n-1}] .$$

z.B. ist $d_1 [g_1] = g_1 [\ ] - [\ ]$

$$d_2 [g_1 | g_2] = g_1 [g_2] - [g_1 g_2] + [g_1] \text{ etc.}$$

Wie berechnet man $Ext^n_G(\mathbb{Z}, A)$?

$$0 \longrightarrow Hom_G(X_0, A) \xrightarrow{d_0^*} Hom_G(X_1, A) \longrightarrow \dots \xrightarrow{d_{n-1}^*} Hom_G(X_n, A) \rightarrow$$

Jedes $f \in Hom_G(X_n, A)$ ist G-invariant und bestimmt durch die Einschränkung auf die Basis in der Form $[g_1 | \dots | g_n]$. Daher haben wir eine Bijektion

$$Hom_G(X_n, A) \longleftrightarrow C^n(G, A) = \{ f : G^n \longrightarrow A \}$$

$$f([g_1 | \dots | g_n]) \longleftrightarrow \bar{f}(g_1, \dots, g_n)$$

Damit erhält d^* die folgende Form

$$d^*(\bar{f})(g_1, \dots, g_n) = d(f)([g_1 | \dots | g_n])$$
$$= g_1 f([g_2 | \dots | g_n]) + \sum_i (-1)^i f([g_1 | \dots | g_i g_{i+1} | \dots | g_n])$$
$$+ (-1)^n f([g_1 | \dots | g_{n-1}])$$
$$= g_1 \bar{f}(g_2, \dots, g_n) + \sum_i (-1)^i \bar{f}(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) + (-1)^n \bar{f}(g_1, \dots, g_{n-1})$$

Bsp $H^1(G,A)$. Für $n=1$ sehen wir, dass ein 1-Kozykel eine Abb $f: G \to A$ ist mit $d^* f = 0$, d.h. für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt

$$(d^* f)(g_1, g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1) = 0.$$

M.a.W. $f \in C^1(G,A)$ ist ein 1-Kozykel, falls für alle $g_1, g_2 \in G$ $\quad f(g_1 g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1)$.

Außerdem sehen wir, dass $f \in C^1(G,A)$ ein 1-Korand ist, falls ein $a \in A$ ex. mit $f(g) = g \cdot a - a$ für alle $g \in G$, d.h. $f = d^* h$ für ein $h \in C^0(G,A) = $ Konst.

Mit der Bezeichnung $\mathrm{Der}(G,A)$ für 1-Kozykel und innere Deriv. $\mathrm{IDer}(G,A)$ für 1-Koränder haben wir $\quad H^1(G,A) = \mathrm{Der}(G,A) / \mathrm{IDer}(G,A)$.

Bem 3.10. Wenn G trivial auf A operiert, dann sind die inn. Deriv. alle $=0$ und die Abl. Homom., d.h. es ist

$$H^1(G,A) \simeq \mathrm{Hom}(G,A) \simeq \mathrm{Hom}(G^{ab}, A), \text{ weil } A \text{ ab.}$$

Bsp $H^2(G,A)$: Für $n=2$ ist $f: G^2 \to A$ ein 2-Kozy. falls für alle $g_1, g_2, g_3 \in G$ gilt

$$g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2) = 0.$$

Dies ist genau Bedingung (3) an eine Faktormenge $m: G^2 \to A$. Ein 2-Korand ist eine Faktormenge f mit $f = d^* h$ für ein $h \in C^1(G,A)$, d.h.

$$f(g_1, g_2) = h(d(g_1, g_2)) = h(g_1 [g_2] - [g_1 g_2] + [g_1])$$
$$= g_1 h(g_2) - h(g_1 g_2) + h(g_2)$$

Dies ist genau Bed. (5) an assoz. Faktoren, d.h. zwei Faktormengen (= 2-Kozykel) sind assoz. gdw sie sich um einen 2-Korand unterscheiden.

Damit erhält man:

<u>Satz</u> 3.11 Sei G eine Gr., A ein G-Modul. Dann sind die Isom. kl. von Erw. von G um A (mit vorgegebener G-Wirkung) genau beschrieben durch die Elte von $H^2(G,A)$. Insbesondere werden die zentralen Erw. von G um A durch $H^2(G,A)$ mit triv. G-Wirkung gegeben.

<u>Def</u> 3.12 Man schreibt auch $H_nG = H_n(G,\mathbb{Z})$ und $H^n(G) = H^n(G,\mathbb{Z})$ für $\mathbb{Z}$ als triv. G-Modul.

<u>Bsp</u> 3.17 $H_n(G,A)$ sind die Homol. gr. von $(A \otimes_G X_n)$, wobei wir jetzt X_n als freien $\mathbb{Z}G$-Modul mit Basis $[g_1|..|g_n]$ betrachten, $X_0 = \mathbb{Z}G$, d.h. $[\,] = 1$.

Die Elte von $A \otimes_G X_n$ sind endl. Summen der Form $a \otimes [g_1|..|g_n]$, d.h. formale Lin. komb. mit Koeff. in A.

$$\longrightarrow A \otimes X_n \longrightarrow A \otimes X_{n-1} \xrightarrow{d_*} \dots \longrightarrow A \otimes X_1 \xrightarrow{1\otimes \varepsilon} A \otimes \mathbb{Z} \to 0$$

Dann ist

$$d_*(a \otimes [g_1|..|g_n]) = a g^{-1} \otimes [g_2|..|g_n] + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \, a \otimes [g_1|..|g_j g_{j+1}|..|g_n] + (-1)^n a \otimes [g_1|..|g_{n-1}].$$

<u>Bsp</u> (ii) $H_1(G) = H_1(G,\mathbb{Z})$ mit $\mathbb{Z}$ als triv. G-Modul

Betrachte $\longrightarrow \mathbb{Z} \otimes X_2 \xrightarrow{1\otimes d_2} \mathbb{Z} \otimes X_1 \xrightarrow{1\otimes d_1} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}G \xrightarrow{1\otimes\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$

Dann ist $\ker(1\otimes d_1) = \mathbb{Z} \otimes X_1$

denn $(1\otimes d_1)(1\otimes[g]) = \underbrace{1\cdot g_1^{-1}}_{=1}\otimes[\,] - 1\otimes[\,] = 0$

und $\operatorname{im}(1\otimes d_2) = \langle 1\otimes u \mid u = [g_2]-[g_1g_2]+[g_1]\rangle$

denn $(1\otimes d_2)(a\otimes[g_1|g_2]) = a g^{-1}\otimes[g_2] - a\otimes[g_1g_2] + a\otimes[g_1]$

$= a\otimes([g_2]-[g_1g_2]+[g_1])$

Also ist $H_1(G) = \ker(1\otimes d_1)/\operatorname{im}(1\otimes d_2)$

$\simeq \mathbb{Z}\otimes X_1 / \langle 1\otimes([g_2]-[g_1g_2]+[g_1])\rangle$

$\simeq G/G' \simeq G^{ab}$.

Daher gilt:

<u>Prop</u> 3.18 $H_1(G) = \operatorname{Tor}_1^G(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \simeq G^{ab}$. $\rightarrow$ p. 73

<u>Satz</u> 3.19 Sei G eine endl. Gr., $|G| = r$, A ein G-Modul.

Dann ist die Ordnung von $f\in H^n(G,A)$, $n>0$, Teiler von r.

<u>Bew</u>: Sei $f\in \operatorname{Hom}_G(X_n, A)$. Setze $u[g_1|\dots|g_{n-1}] = \sum_{g\in G} f([g_1|\dots|g_{n-1}|g])$

Dann ist

$\sum_g df[g_1|\dots g_n|g]$

$= \sum_g g_1 f[g_2|\dots g_n|g] + \sum_{g,i}(-1)^i f([g_1|\dots|g_ig_{i+1}|\dots|g_n|g])$

$+ \underbrace{\sum_g (-1)^n f([g_1|\dots|g_ng])}_{=u[g_1|\dots|g_{n-1}]} + \sum_g (-1)^{n+1} f[g_1|\dots|g_n]$.

$= g_1 u[g_2|\dots g_n] + \sum (-1)^i u[g_1|\dots|g_ig_{i+1}|\dots|g_n]$

$+ u[g_1|\dots|g_{n-1}] + (-1)^{n+1}|G|\, f[g_1|\dots|g_n]$.

$= du[g_1|\dots|g_n] + (-1)^{n+1}|G|\, f([g_1|\dots|g_n])$

Ist $df = 0$, dann ist

$$|G|\, f[g_1|\ldots|g_n] = \pm\, du[g_1|\ldots|g_n] \in B^n(G,A),$$

d.h. $|G| \cdot Z^n(G,A) \subseteq B^n(G,A)$, also $|G|\, H^n(G,A) = 0$.

Kor 3.14 Ist G endl. Gr., A ein endl. G-Modul mit $\mathrm{ggT}(|G|, |A|) = 1$, dann ist $H^n(G,A) = 0$ für alle $n > 0$.

Bew: Wegen $|A| \cdot f = 0$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_G(X_n, A)$ teilt die Ordnung von f den $\mathrm{ggT}(|G|, |A|)$.

Kor 3.15 Ist G endl., A tors. fr., div. G-Modul, dann ist $H^n(G,A) = 0$ für alle $n > 0$.

Bew: Es ist $m f(g) = f(m \cdot g) = 0$ für $m = |G|$ und alle $g \in G$, also $m \cdot f = 0$ und daher $f = 0$.

Prop: 3.16 Sei G eine endl. Gr., $K = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ als triv. G-Modul. Dann ist $H^2(G) \simeq \mathrm{Hom}(G, K)$.

Bew: Aus der ex. Seq. triv. G-Moduln

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to K \to 0 \quad \text{erhalten wir}$$

$$H^1(G,\mathbb{Q}) \to H^1(G,K) \to H^2(G,\mathbb{Z}) \to H^2(G,\mathbb{Q})$$

Nach Kor 3.14 sind $H^1(G,\mathbb{Q}) \simeq H^2(G,\mathbb{Q}) = 0$, also

$$H^1(G,K) \simeq \mathrm{Hom}(G,K) \simeq H^2(G,\mathbb{Z}) = H^2(G).$$

H^2~~(G) [illegible]~~ nach Bem 3.10.

Nun zu den Homologiegruppen Bsp. 3.17

Um den <u>Schur-Multiplikator</u> $H_2(G)$ aus einer Darstellung zu berechnen, holen wir etwas weiter aus:

<u>Erinnerung</u>: Es ist $\mathrm{Der}(G,A) = 1$-Kozykel in $C^1(G,A)$, d.h. $d: G \to A$ mit $d(g_1g_2) = d(g_1) + g_1 d(g_2)$.

<u>Lemma</u> 3.19 Es gibt einen natürl. Isom.

$$\varphi: \mathrm{Der}(G,A) \to \mathrm{Hom}_G(IG, A), \; \varphi(d) = [g-1 \mapsto d(g)]$$

<u>Bew</u>: Sei $d \in \mathrm{Der}(G,A)$. Beh: $\varphi(d) \in \mathrm{Hom}_G(IG,A)$.

Für $g_1, g_2 \in G$ ist

$$\varphi d(g_1(g_2-1)) = \varphi d((g_1g_2-1)-(g_1-1)) = d(g_1g_2) - d(g_1)$$
$$= g_1 d(g_2) + d(g_1) - d(g_1) = g_1 d(g_2).$$

Ist umgekehrt $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(IG,A)$ gegeben, setze

$d_\varphi: G \to A$, $g \mapsto \varphi(g-1)$. <u>Beh</u>: $d_\varphi \in \mathrm{Der}(G,A)$.

$$d_\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1g_2-1) = \varphi(g_1(g_2-1) + (g_1-1))$$
$$= g_1\varphi(g_2-1) + \varphi(g_1-1) = g_1 d_\varphi(g_2) + d_\varphi(g_1).$$

Offens. sind die Abb zueinander invers.

<u>Lemma</u> 3.20 Für jeden G-Modul A ex. eine Bij.

$$\mathrm{Der}(G,A) \longrightarrow \{f: G \to A \rtimes G : \pi f = id_G\}.$$

<u>Bew</u>: Ist $d \in \mathrm{Der}(G,A)$, dann ist $f(g) = (d(g), g)$ ein Homom mit $\pi \circ f = id_G$, denn $f(gh) = (d(gh), gh) = (d(g) + gd(h), gh)$

Umgekehrt bestimmt jeder Gr.hom. $f: G \to A \rtimes G$ mit $\pi \circ h = id_G$ eine Deriv. $d = \pi_A \circ f: G \longrightarrow A$, denn es ist $d(gh) = \pi_A(f(gh)) = \pi_A(f(g), f(h)) = \pi_A f(g) + g\pi_A f(h)$

Satz 3.21: Sei $F = F_S$ freie Gp. über S. Dann ist $IF = \langle g-1 \mid g \in F\rangle$ ein freier $\mathbb{Z}F$-Modul über $S-1 = \langle s-1 \mid s \in S\rangle$.

Bew: Offens. ist $\langle S-1\rangle = IF$. Es genügt also z.z. dass sich jede Fkt $f: S-1 \to M$ für bel. $\mathbb{Z}F$-Mod. M zu einem F-Modulhomom. $\tilde{f}: IF \to M$ fortsetzen lässt. Weil F frei von S erz. wird, def. $\bar{f}: F \to M \rtimes F$, $s \mapsto (f(s-1), s)$ einen Gphom., der nach Lemma 3.20 eine Der. $d \in \mathrm{Der}(F, M)$ bestimmt mit $d(s) = f(s-1)$. Nach Lemma 3.19 ex. dann $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_F(IF, M)$ mit $\tilde{f}(s-1) = d(s) = f(s-1)$.

Erinnerung: Es ist $H_n(G, A) = \mathrm{Tor}^G_{n-1}(A, IG)$

und $H^n(G, A) = \mathrm{Ext}^{n-1}_G(IG, A)$

nach weil (*) $0 \to IG \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ ex und $\mathbb{Z}G$ frei.

Kor 3.22 Ist F freie Gp., dann ist für $n \geq 2$

$$H^n(F, A) = H_n(F, B) = 0 \quad \text{für alle } F\text{-Mod. } A, B,$$

d.h. $\mathrm{cd}(F) = 1$

Bew: Es ist $0 \to IF \to \mathbb{Z}F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ ex und da IF frei eine freie Aufl. von $\mathbb{Z}$. Also folgt die Beh. aus der Vorbem.

< S. 75

Überlegung: Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze ex. Seq. von G-Moduln, dann erhalten wir lange ex. ~~Homol.~~ Homol.- und Kohomol. folgen.

Satz 3.23 (bzw 2.50) Sind R, S Ringe, $f: R \to S$ Homom., S_R als R-Mod proj. Dann gilt für (U_S, A_R)

(i) $\mathrm{Ext}_S^n(U, A^f) \simeq \mathrm{Ext}_R^n({}^fU, A)$.

Ist ${}_RS$ flach, dann gilt

(ii) $\mathrm{Ext}_S^n(A_f, U) \simeq \mathrm{Ext}_R^n(A, {}^fU)$

und für $({}_SU, A_R)$ gilt

(iii) $\mathrm{Tor}_n^S(A_f, U) \simeq \mathrm{Tor}_n^R(A, {}^fU)$

wobei $A_f = A \otimes_R S$, $A^f = \mathrm{Hom}_R(S, A)$.

Bew: Sei $0 \to A \to J$ eine inj. Aufl. Weil S_R proj. ist, ist der Funktor $\mathrm{Hom}_R(S, -)$ ex. Also erh. wir eine ex Seq. $0 \to A^f \to J^f$ $(*)$.
Nach Kor 2.10 sind die koindut. Moduln J_n^f wieder inj., d.h. $(*)$ ist inj. Aufl. von A^f, auf die wir $\mathrm{Hom}_S(U, -)$ anwenden können. Dann ist

$$\mathrm{Hom}_S(U, J_n^f) \simeq \mathrm{Hom}_R({}^fU, J_n) \text{ nach Satz 2.8},$$

also gilt (i)
Ist ${}_RS$ flach, dann ist $- \otimes_R S$ ex, d.h. für jede proj. Aufl. $P \to A \to 0$ ist auch $P_f \to A_f \to 0$ proj. Aufl. von A_f, auf die wir $\mathrm{Hom}_S(-, U)$ anwenden. Dann ist nach Satz 2.8 $\mathrm{Hom}_S(P_{n f}, U) \simeq \mathrm{Hom}_R(P_n, {}^fU)$ und damit folgt (ii). Für (iii) wenden wir den Funktor $- \otimes_S U$ auf die Aufl. $P_f \to A_f \to 0$ an und benutzen $(P_n)_f \otimes_S U \simeq P_n \otimes_R {}^fU$.

<u>Def</u> 3.24 Ein G-Modul A heißt <u>koinduziert</u>, falls eine ab. Gp. X ex. mit $A = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, X)$, d.h. falls $A = X^f$ für ein $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}G$ und <u>induziert</u>, falls $A = X_f = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X$

Direkte Summanden von koinduz. Moduln heißen <u>relativ inj</u> und von induz. Moduln <u>relativ proj</u>.
Es gilt:

<u>Lemma</u> 3.25 Ist A rel. inj., dann ist $H^n(G, A) = 0$ für alle $n \geq 1$. Ist A rel. proj., dann ist $H_n(G, A) = 0$ für alle $n \geq 1$.

<u>Bew</u>: Wegen der Add. genügt es, die Beh. für koinduz. bzw induz. Moduln zu zeigen.

- Weil $\mathbb{Z}G$ als $\mathbb{Z}$-Modul frei ist, folgt aus Satz 3.23 für $A = B^f$, $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}G$:

$$H^n(G, A) = H^n(G, B^f) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, B^f) \underset{3.23}{=} \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \underset{2.37}{=} 0$$

und für $A = B_f$ folgt ebenso:

$$H_n(G, A) = \mathrm{Tor}^G_n(\mathbb{Z}, A) = \mathrm{Tor}^G_n(\mathbb{Z}, B_f) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_n(\mathbb{Z}, B) = 0$$