<u>Def</u> 3.24 Ein G-Modul $A$ heißt <u>koinduziert</u>, falls eine ab. Gr. $X$ ex. mit $A = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, X)$, d.h. falls $A = X^f$ für ein $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}G$ und <u>induziert</u>, falls $A = X_f = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X$

Direkte Summanden von koinduz. Moduln heißen <u>relativ inj</u> und von induz. Moduln <u>relativ proj</u>.

Es gilt:

<u>Lemma</u> 3.25 Ist $A$ rel. inj., dann ist $H^n(G, A) = 0$ für alle $n \geq 1$. Ist $A$ rel. proj., dann ist $H_n(G, A) = 0$ für alle $n \geq 1$.

<u>Bew</u>: Wegen der Add. genügt es, die Beh. für koinduz bzw induz. Moduln zu zeigen.

· Weil $\mathbb{Z}G$ als $\mathbb{Z}$-Modul frei ist, folgt aus Satz 3.23 für $A = B^f$, $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}G$:

$$H^n(G, A) = H^n(G, B^f) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, B^f) \underset{3.23}{=} \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \underset{2.37}{=} 0$$

und für $A = B_f$ folgt ebenso:

$$H_n(G, A) = \mathrm{Tor}^G_n(\mathbb{Z}, A) = \mathrm{Tor}^G_n(\mathbb{Z}, B_f) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_n(\mathbb{Z}, B) = 0$$

Für kurze ex. Seq von G-Moduln erhalten wir lange ex (Ko-) homologiefolgen. Für ex. Folgen von Gr. gilt:

<u>Satz</u> 3.26 Ist $1 \to N \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} L \to 1$ ex, $A, B$ L-Mod., dann sind folgende Folgen ex:

(i) $0 \longrightarrow N^{ab} \longrightarrow \mathbb{Z}L \otimes_G IG \longrightarrow IL \longrightarrow 0$

(ii) $0 \to H^1(L,A) \xrightarrow{\mu^*} H^1(G,A) \xrightarrow{\lambda^*} \mathrm{Hom}_L(N^{ab},A)$

$$\xrightarrow{t} H^2_L(L,A) \xrightarrow{\mu^*} H^2_G(G,A)$$ und dual

(iii) $H_2^G(G,B) \to H_2^L(L,B) \to B \otimes_L N^{ab} \to H_1^G(G,B)$

$$\to H_1^L(L,B) \to 0 .$$

Die Abb. $\mu^*, \lambda^*$ heißen Inflation bzw Restriktion, der Verbind.hom $t$ Überleitung.

Bew: Aus Erinnerung (*) erhalten wir durch Tensor. mit $\mathbb{Z}L$ über $\mathbb{Z}G$

$$\begin{array}{l}
\underset{\substack{\| \\ 0}}{\mathrm{Tor}_1^G(\mathbb{Z}L,\mathbb{Z}G)} \to \mathrm{Tor}_1^G(\mathbb{Z}L,\mathbb{Z}) \to \underset{\cancel{\cong \mathbb{Z}L}}{\mathbb{Z}L \otimes_G JG} \to \overset{\substack{\mathbb{Z}L \\ \wr\|}}{\mathbb{Z}L \otimes_G \mathbb{Z}G} \xrightarrow{\varepsilon_*} \\
\qquad \xrightarrow{\varepsilon_*} \underset{\substack{\wr\| \\ \mathbb{Z}}}{\mathbb{Z}L \otimes_G \mathbb{Z}} \to 0
\end{array}$$

Es ist $\mathrm{Tor}_1^G(\mathbb{Z}L,\mathbb{Z}) \overset{3.23}{\cong} \mathrm{Tor}_1^N(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$

$$= H_1(N,\mathbb{Z}) \underset{3.13}{\cong} N^{ab}$$

und $\ker \varepsilon_* \cong JL$. Damit erhalten wir (i)

$$0 \to N^{ab} \to \mathbb{Z}L \otimes_G JG \to JL \to 0 .$$

Weiterhin ist nach Satz 2.8 mit $R = \mathbb{Z}G$, $S = \mathbb{Z}L$ für $A \in L$-Mod

$$P(A) := \mathrm{Hom}_L(\mathbb{Z}L \otimes_G JG, A) \cong \mathrm{Hom}_G(JG, {}^{\mu}A) =: Q({}^{\mu}A)$$

Seien $P^n, Q^n$ die linksder. Funktoren von $P, Q$.

Sei $0 \to A \to J \to C \to 0$ eine Aufl. mit $J$ inj. $L$-Mod

Dann erhalten wir wegen $P^1(J) = 0$ und

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & P^0(A) & \to & P^0(J) & \to & P^0(C) & \to & P^1(A) & \to & 0 \\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \\
0 & \to & Q^0({}^{\mu}A) & \to & Q^0({}^{\mu}J) & \to & Q^0({}^{\mu}C) & \to & Q^1({}^{\mu}A) & \to & Q^1({}^{\mu}J)
\end{array}$$

eine Inj $\quad P^1(A) \hookrightarrow Q^1(^M\!A)$

$$\begin{array}{cc} P^1(A) & Q^1(^M\!A) \\ \wr\wr & \| \\ \mathrm{Ext}^1_L(\mathbb{Z}L \otimes_G \mathfrak{I}G, A) & \mathrm{Ext}^1_G(\mathfrak{I}G, {}^M\!A) \end{array}$$

Anwendung von $\mathrm{Hom}_L(-, A)$ auf (i) ergibt

$$0 \to \mathrm{Hom}_L(\mathfrak{I}L, A) \to \mathrm{Hom}_L(\mathbb{Z}L \otimes \mathfrak{I}G, A) \to \mathrm{Hom}_L(N^{ab}, A)$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_L(\mathfrak{I}L, A) \to \mathrm{Ext}^1_L(\mathbb{Z}L \otimes_G \mathfrak{I}G, A)$$

Nun ist

$$\mathrm{Hom}_L(\mathfrak{I}L, A) = H^1(L, A), \quad \mathrm{Ext}^1_L(\mathfrak{I}L, A) = H^2(L, A)$$
$$\mathrm{Hom}_L(\mathbb{Z}L \otimes_G \mathfrak{I}G, A) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{I}G, A) \simeq H^1(G, A) \quad \text{und}$$
$$\mathrm{Ext}^1_L(\mathbb{Z}L \otimes_G \mathfrak{I}G, A) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_G(\mathfrak{I}G, {}^M\!A) \simeq H^2(G, {}^M\!A).$$

Damit gilt (ii). Der Beweis von (iii) geht entspr.

<u>Kor. 3.27</u> Ist $1 \to N \to G \to L \to 1$ ex., dann auch

$$H_2(G) \to H_2(L) \to N/[G,N] \to G^{ab} \to L^{ab} \to 0$$

<u>Bew:</u> Nach Satz 2.26 haben für $\mathbb{Z}$ als triv. L-Modul wegen $H_1(G) \cong G^{ab}$, $H_1(L) \cong L^{ab}$ und

$$\mathbb{Z} \otimes_L N^{ab} \simeq N^{ab}/\langle (g-1)nN' \mid g \in L, n \in N \rangle$$
$$\simeq N/[G,N]$$

denn die L-Modulstr. auf $N^{ab}$ wird durch Konj. in G induziert.

<u>Satz</u> 3.28 (Hopf) Ist $1 \to R \to F \to G \to 1$ eine Präsentierung von G, dann ist $H_2(G) \simeq R \cap [F,F]/[F,R]$

Insbesondere hängt die rechte Seite also nicht von der Präsentierung ab!

Bew: Nach Kor. 3.22 ist $H_2(F)=0$, also

$$H_2(G) \simeq \ker\left(R/[F,R] \longrightarrow F/[F,F]\right)$$

$$\simeq (R \cap [F,F])/[F,R].$$

Allgemeiner gilt das Univers. Koeff. Thm.:

<u>Satz</u> 3.29 Für jeden triv. G-Modul $A$ ist folg. Seq ex.

$$0 \to \mathrm{Ext}(G^{ab}, A) \longrightarrow H^2(G,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_2(G), A) \to 0.$$

Ist $G$ perf. (d.h. $G^{ab}=1$), dann ist also

$$H^2(G,A) \simeq \mathrm{Hom}(H_2(G), A).$$

Bew: (ÜA) d.h. $H_2(G)$ repräs. den Funktor $H^2(G,-)$, falls $G$ perf.

## §4 (Ein bisschen) Galois-Kohomologie

Sei $L/K$ eine endl. Gal.-erw. mit Galoisgr. $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.
Dann operiert $G$ auf den ab. Gr. $(L,+)$ und $(L^*,\cdot)$.
Außerdem besitzt $L/K$ eine Normalbasis, d.h. eine Basis der Form $\{u_g = u^g \mid g \in G\}$ für ein $u \in L$.
(Bew. s. Lang, Algebra, Cohn, Basic Alg. p. 439, ...)
Es gilt:

<u>Satz</u> 4.1 $H^n(G,L) = 0 = H_n(G,L)$.

Bew: Weil $L/K$ eine Normalbasis besitzt, ist

$$L \simeq K \otimes \mathbb{Z}G \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, K),$$ d.h. $L$ ist rel. proj. und rel. inj., daher folgt die Beh aus Lemma 3.25. $\square$

Daher betrachtet man nur Wirkung auf $L^*$.

Satz 4.2 $H^1(G, L^*) = 0$

Bew: Sei $f \in C^1(G, L^*)$ ein 1-Kozykel, d.h. $f(st) = s f(t) \cdot f(s)$ und sei $a_s := f(s) \in L^*$. Wegen der lin. Unabh. der Elte von $G$ in $\mathbb{Z}G$ ex. ein $c \in L$ mit

$$\Big( \sum_{t \in G} a_t t \Big)(c) =: b \neq 0 .$$

Dann ist $s(b) = \sum_t s(a_t)\, st(c)$

$$= \sum_t a_s^{-1} a_{st}\, st(c) = a_s^{-1} b, \quad \text{d.h.}$$

$f(s) = a_s = s(b)^{-1} \cdot b^{-1}$ ist ein Rand.

Kor 4.3 (Hilbert 90) Ist $G$ zykl. mit Erz. $s$, $x \in L^*$ mit $N(x) = \prod s^i(x) = 1$, dann ex $y \in L^*$ mit $x = \frac{y}{s(y)}$.

Bew: $f(s) = x$ def 1-Kozykel mit $f(s^i) = \prod_{j<x} s^j(x)$.

Daher ist nach Satz 4.2 $x = f(s) = \frac{b}{s(b)}$

für $b = y^{-1} \in L^*$.

Ziel: Wir werden $H^2(G, L^*)$ mit der Brauergr. $Br_L(K)$ identifizieren.

Erinnerung: Eine $K$-Alg. $A$ heißt zentral einf. über $K$, falls $A$ als Ring einf. ist und $Z(A) = K \cdot 1_A$.

Bsp $M_n(K)$, $\mathbb{H}$ reelle Quat. $/\mathbb{R}$.

Dann sind alle einf. $A$-Moduln isom, und $A \simeq M_n(D)$ für einen eind best. endl. dim Schiefkörper $D$ über $K$.

Nämlich $D^{op} \simeq End_A(U)$ für $U \leq A$ min Linksideal (= einf. $A$-Modul). Körpererw $L/K$ heißt Zerfällungskörper für $A$, falls $A \otimes_K L \simeq M_m(L)$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Dann sind $A \sim D$ Braueräquiv., falls $A \simeq M_n(D)$ und die Äquiv.kl. bilden die Brauergr. durch

$$[A][B] = [A \otimes B], \quad [A]^{-1} = [A^{op}].$$

Die Äquiv.kl. werden also von endl. dim Schiefkörpern repräsentiert. Eine zentr. einf. Alg. $A$ zerfällt über jedem max Unterkörper $E$. Bsp $\mathbb{H}$ zerfällt über $\mathbb{C}$. $A$ enthält immer einen sep. Zerf.körper. Daher ex. immer eine endl. Gal.erw $L/K$, über der $A$ zerfällt.

<u>Def</u> 4.4 Eine zentr. einf. $K$-Alg. heißt <u>verschränktes Prod.</u> falls ein max Unterkörper $L \subseteq A$ ex, der Gal.erw. von $K$ ist.

<u>Satz</u> 4.5 Jede Brauerkl. enthält ein verschr. Produkt.

<u>Bew</u>: Sei $D$ endl. dim. Schiefkörper über $K$, $F \subseteq D$ sep. Zerfällungskörper, $E \supseteq F$ Gal.erw. über $K$.
Ist $[E:F] = n$, $[F:K] = r$, dann ist $E \subseteq M_n(D)$, also $[E:K] = n \cdot r$, $[M_n(D):K] = n^2 r^2$, d.h. $E$ ist max Unterkörper in $M_n(D)$ und $D \sim M_n(D)$ ist verschr. Produkt mit $M_n(D) \sim D$.

<u>Satz</u> 4.6 Sei $L/K$ Gal., $G = Gal(L/K)$. Sei $Br_L(K) \subseteq Br(K)$ die Ugr. von $Br(K)$ der über $L$ zerf. zentr. einf. $K$-Alg. Dann ist $H^2(G, L^*) \simeq Br_L(K)$.

(und $H^2(\Gamma, L^*) \simeq Br(K)$ für $\Gamma = Gal(K^{sep}/K)$.)

<u>Bew</u>: Sei $f \in C^2(G, L^*)$ ein 2-Kozykel. Wir konstr. ein verschr. Produkt $A = (L, G, f)$ auf folg. Weise:

Sei $A = L^{|G|}$ mit $L$-Basis $\{u_s \mid s \in G\}$. Dann hat jedes $a \in A$ eine eind. Darstellung $a = \sum' \rho_s u_s$, $\rho_s \in L$, und man erhält eine assoz. Multipl. auf $A$ durch

$$u_s \cdot u_t = f_{s,t}\, u_{s \cdot t}\ ,\ s,t \in G$$
$$u_s \cdot \rho \ = s(\rho)\, u_s\ ;\ \rho \in L .$$

Dann ist $\left(\sum_s' \rho_s u_s\right)\left(\sum_t' \sigma_t u_t\right) = \sum' f_{s,t}\, \rho_s\, s(\sigma_t)\, u_{s \cdot t}$.

Ist $\alpha \in K$, dann gilt für $a, b \in A$

$$\alpha(ab) = (\alpha a) b \ = a(\alpha b)\text{, d.h. } A \text{ ist } K\text{-Alg.}$$

Die Elte $u_s \in A$ sind wegen $u_s u_{s^{-1}} = f_{s,s^{-1}} u_1 \in L^*$ in $A$ invertierbar.

$A$ ist einfach: Ist $\bar{A} = A/B \neq 0$ ein Quotient von $A$, dann enthält $B$ keine invertierbaren Elte. Also ist für $\pi : A \to \bar{A}$, $a \mapsto \bar{a}$ die Einschränkung $\pi|_L : L \to \bar{L}$ ein Monom. und daher $\bar{u}_s \in \bar{A}$ invertierbar. Dedekinds Lemma zeigt, dass die $\bar{u}_s$ lin. unabh. über $\bar{L}$ sind, d.h. $[\bar{A} : \bar{L}] = n$. Dann ist aber

$[\bar{A} : \bar{L}] \cdot [\bar{L} : \bar{K}] = n^2 = [A : K]$, d.h. es ist $\bar{A} = A$ und $A$ einfach. Nun zeigt man noch $Z_A(L) = L$ und $Z(L) = Z(A) = K$, d.h. $A$ ist zentr. einf. über $K$ mit Zerf.körper $L \subseteq A$, d.h. $A$ ist verschr. Produkt.

Es ist nicht schwer zu sehen:

(*) $\quad f = f' \in H^2(G, L^*)$ gdw $(L, G, f) \cong (L, G, f')$

(Es würde $\sim$ genügen anstelle der Isom.)

**Lemma (Dedekind).** *Sei $H$ eine Halbgruppe, $\Omega$ ein Körper. Paarweise verschiedene Halbgruppen-Homomorphismen $H \to (\Omega, \cdot)$ sind linear unabhängig über $\Omega$.* (Hier bezeichnen wir mit $(\Omega, \cdot)$ die multiplikative Halbgruppe von $\Omega$).

Das heißt: Sind die Halbgruppen-Homomorphismen $\sigma_1, \ldots, \sigma_t \colon H \to (\Omega, \cdot)$ paarweise verschiedene und sind Skalare $c_i \in \Omega$ mit

$$\sum\nolimits_{i=1}^{t} c_i \sigma_i(h) = 0 \qquad \text{für alle } \ h \in H$$

gegeben, so gilt $c_i = 0$ für $1 \leq i \leq t$.

Beweis: Die Halbgruppe $H$ sei multiplikativ geschrieben, das neutrale Element wird also mit $1_H$ bezeichnet.

Angenommen, die Abbildung $\sum_{i=1}^{t} c_i \sigma_i \colon H \to \Omega$ ist die Nullabbildung. Mit Induktion nach $t$ wird gezeigt: es ist $c_i = 0$ für alle $i$. Dies ist klar für $t = 1$ (denn ein Halbgruppen-Homomorphismus bildet das Einelement $1_H$ auf die $1 \in \Omega$ ab; also $0 = c_1 \sigma_1(1_H) = c_1$). Sei nun $t \geq 2$. Wir können annehmen, dass $c_i \neq 0$ für alle $i$ gilt. Da $\sigma_1 \neq \sigma_t$, gibt es $a \in H$ mit $\sigma_1(a) \neq \sigma_t(a)$. Wir erhalten die folgenden beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} c_1\sigma_1(a)\sigma_1(h) + c_2\sigma_2(a)\sigma_2(h) + \cdots + c_t\sigma_t(a)\sigma_t(h) &= 0 \\ c_1\sigma_t(a)\sigma_1(h) + c_2\sigma_t(a)\sigma_2(h) + \cdots + c_t\sigma_t(a)\sigma_t(h) &= 0 \end{aligned}$$

(die erste erhält man aus $\sum_{i=1}^{t} c_i \sigma_i(ah) = 0$, indem man verwendet, dass $\sigma_i$ multiplikativ ist; die zweite, indem man $\sum_{i=1}^{t} c_i \sigma_i(h)$ mit $\sigma_t(a)$ multipliziert). Subtraktion liefert eine Linearkombination von $\sigma_1, \ldots, \sigma_{t-1}$, wobei der Koeffizient von $\sigma_1$ gleich $c_1(\sigma_1(a) - \sigma_t(a))$, also von Null verschieden ist. Dies widerspricht der Induktionsannahme.

Beh: $\varphi: H^2(G, L^*) \to Br_L(K)$, $f \mapsto (L, G, f)$ ist Isom.

Lemma 4.7 $(L,G,f) \otimes_K (L,G,g) \sim (L,G,fg)$

Bew: Sei $A = (L,G,f) = \bigoplus_{s\in G} L u_s$, $B = (L,G,g) = \bigoplus_{s\in G} L v_s$

und $C = (L,G,gf) = \bigoplus_{s\in G} L w_s$.

Sei $M = A \dot{\otimes}_L B$ mit $A$ als Links-L-VR, d.h.

$$pa \otimes b = a \otimes pb, \quad p \in L, a \in A, b \in B.$$

Dann ist $M$ ein $(A \otimes_K B)$-Rechtsmodul via

$$(a' \dot{\otimes}_L b')(a \otimes_K b) = a'a \otimes_L b'b$$ und ein

C-Linksmodul via

$$(p w_s)(a \dot{\otimes}_L b) = p u_s a \otimes v_s b, \quad p \in L, s \in G.$$

Z.z. ist, dass dies wirklich eine Links-C-Modulstr. definiert, d.h. $(cc')m = c(c'm)$ für $c = p w_s$, $c' = p' w_t$.

Es ist $1(a \dot{\otimes} b) = w_1(a \dot{\otimes} b) = u_1 a \otimes v_1 b = a \otimes b$.

Def. einen K-Alg.homom.

$$\psi: (A \otimes_K B)^{op} \to \mathrm{End}_C(M), \quad \psi(x)(m) = m \cdot x$$

für $x \in A \otimes_K B$, $m \in M$.

Dann ist $\psi$ inj., da $\psi \neq 0$ und $(A \otimes_K B)^{op}$ einf.,

also ist $\dim_L M = n^2$, $\dim_K M = n^3 = n \dim_K C$,

daher $M \simeq C^n$ und man erhält

$$\mathrm{End}_C M \simeq \mathrm{End}_C C^n \simeq M_n(\mathrm{End}_C C) \simeq M_n(C^{op}) \simeq C^{op} \otimes_K M_n(K)$$

Daher ist $\dim_K(\mathrm{End}_C M) = n^2 \cdot \dim_K C = n^4$
$= \dim_K(A \otimes B)$

und $\varphi$ also Isom.

Es ist $(A \otimes_K B)^{op} \simeq C^{op} \otimes_K M_n(K)$

also $(A \otimes B)^{op} \sim C^{op}$, d.h. $A \otimes B \sim C$.

Die Surj. von $\varphi$ folgt aus Satz 4.5 und der Konstrukt

Für die Injekt. sei $f \in Z^2(G, L^*)$ mit

$A = (L, G, f) \sim K = 1_{Br(K)}$.

Dann ist wegen $\dim_K A = n^2$ also $A \simeq M_n(K)$.

Es ist $(L, G, 1) = \bigoplus_{s \in G} L v_s$ mit $v_s v_t = v_{st}$ und

$v_s \rho = s(\rho) v_s$ für $s \in G, \rho \in L$.

Dann ist $\psi: (L, G, 1) \to \mathrm{End}_K(L)$, $\psi(\rho v_s)(x) = \rho s(x)$

ein K-Alghomom. und inj., da $(L, G, 1)$ einf.

Aus Dim. gründen ist $\psi$ surj., also ein Isom.

Wegen $(*)$ folgt $f \in B^2(G, L^*)$, d.h. $f = 1 \in H^2(G, L^*)$.

Kor. 3.7 $Br(K)$ ist Torsionsgr.

Bew: Ist $[D] \in Br(K)$, $L/K$ endl. dim Gal. zerf. körper

von $D$, dann ist $[D]^{|G|} = 0$ in $Br_L(K) \simeq H^2(G, L^*)$

für $G = Gal(L/K)$.

Bem: Es gibt kleinere Schranke.

Ziel: Ist $K$ lok. Körper, etwa $K = \mathbb{Q}_p$, dann ist

$Br(K) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

# § 5 Bewertungstheorie

Def 5.1 Eine ab. Gr. $\Gamma$ heißt total geordnet (oder: linear geordnet) bzgl $\leq$, falls für $a, b, c \in \Gamma$ gilt

(i) $a \leq a$ (refl)

(ii) $a \leq b$, $b \leq a \Rightarrow a = b$ (antisym)

(iii) $a \leq b$, $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (trans.)

(iv) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (Translationsinv.)

(v) Es gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$ (total.)

Bsp: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, <)$, $\mathbb{Z}^n$ mit lex. Ordnung.

Def 5.2 Sei $K$ ein Körper, $(\Gamma, \leq)$ tot. geord. ab. Gr. Eine Abb. $v: K^* \longrightarrow \Gamma$ heißt Bewertung, falls

$v(ab) = v(a) + v(b)$, d.h. $v$ ist Gr.homom.

$v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für $a+b \neq 0$.

Man setzt $v(0) = \infty$, also $v: K \to \Gamma \cup \{\infty\}$.

Dann heißt $(K, v)$ <u>bewerteter Körper</u>.

Ist $\Gamma = \mathbb{R}$ heißt die Bewertung reell, für $\Gamma = \mathbb{Z}$ diskret (vom Rang 1)

Bsp 5.3 (i) Für jeden Körper ex triviale Bew $v: K \to \{0, \infty\}$

(ii) Die p-adische Bewertung $v_p$ auf $\mathbb{Q}$ ist def durch

$$v_p(q) = m \in \mathbb{Z} \text{ falls } q = p^m \frac{a}{b} \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z},\ p \nmid ab.$$

(iii) Für $L = K(X)$, $p \in K[X]$ irred. def.

$$v_p\left(p^n \frac{f}{g}\right) = n \text{ mit } p \nmid f \cdot g$$ eine Bewertung.

Bem. 5.4 Für jeden bewert. Körper $(K,v)$, $x,y\in K$ gilt:

(i) $v(1)=0$, $v(-x)=v(x)$

(ii) Es ist $v(x-y)\geq \min\{v(x),v(y)\}$ mit Gleichheit falls $v(x)\neq v(y)$.

(iii) Sind $a_1,\dots a_n\in K$ mit $\sum a_i=0$, dann ex $i\neq j$ mit $v(a_i)=v(a_j)$

Bew Üb.

Def 5.5 Ist $(K,v)$ diskr. bewert. Körper, dann ist $v(K^*)\subseteq\mathbb{Z}$ und daher $v(K^*)=r\mathbb{Z}$ für ein $r\geq 0$.

Ist $r=0$, dann ist die Bewert. trivial. Sonst ist auch $\frac{1}{r}v(x)$ eine Bewert. auf $K$ mit $\frac{1}{r}v(K^*)=\mathbb{Z}$. Eine solche Bewertung heißt normalisiert

Def 5.6 Ist $(K,v)$ ein bewert. Körper, dann heißt $V=\{x\in K \mid v(x)\geq 0\}$ der Bewertungsring von $(K,v)$.

$V$ ist ein lokaler Ring, d.h. besitzt ein eind. max. Ideal $\mathfrak{m}=\{x\in K \mid v(x)>0\}$. (Denn die $x\in V$ mit $v(x)=0$ sind Einheiten in $V$.)

Der Körper $\overline{K}=K_v=V/\mathfrak{m}$ heißt Restklassen- oder Residuenkörper von $(K,v)$.

$U=\{x\in V \mid v(x)=0\}$ ist die Einheitengr. von $V$.

Bsp 5.7. (i) Ist $(K,v)$ triv. bewert., dann ist $K_v=K$.

(ii) Für $(\mathbb{Q},v_p)$ ist $\mathbb{Q}_{v_p}=\mathbb{F}_p$.

(iii) Für $(K(x),v_p)$ ist der Res.körper $K[x]/(p)$.

Lemma 5.8 Sei $K$ ein Körper, $V \subseteq U$ Unterring. Dann ist $V$ ein Bewert.ring in $K$ gdw für alle $x \in K^*$ $x \in V$ oder $x^{-1} \in V$.

Bew: "$\Rightarrow$" folgt aus Def.

"$\Leftarrow$" Sei $V \subseteq K$ wie in der Beh. und def für $a, b \in K^*$
$$aU \leq bU \text{ falls } a^{-1}b \in U.$$ Damit wird $K^*/U$ zu einer geordn. ab. Gr. und $v: K^* \to K^*/U$, $a \mapsto aU$ eine Bewertung (nachrechnen!)

Satz 5.9 Sei $(K, v)$ ein bewert. Körper mit Bewert.ring $V$, dann ist $v$ diskret gdw $V$ ein Hauptidealring ist. In diesem Fall ex. ein uniformisierendes Elt $\pi \in K$ mit $K^* = \langle \pi \rangle \times U$. Ist $v$ normalisiert, dann ist
$$v(\pi^n u) = n \text{ für } u \in U, n \in \mathbb{Z}.$$

Bew: Sei $(K, v)$ ein diskret bew. Körper, $\pi \in K$ mit $v(\pi) > 0$ min., also $v(\pi) = 1$ nach Normalisieren.

Ist $a \in K^*$ mit $v(a) = n \in \mathbb{Z}$, dann ist
$$v(a\pi^{-n}) = v(a) - n \cdot v(\pi) = 0, \text{ d.h. } a\pi^{-n} \in U.$$
Offens. ist $V$ ein Hauptidealring, die Ideale in $V$ sind von der Form $0$ oder $(\pi^n)$, $n \geq 0$.

Ist umgekehrt $V$ ein Hauptidealring, dann ist das max. Ideal von der Form $(p)$ und $\bigcap (p^n) = 0$.

(Sonst ist $\bigcap (p^n) = (q)$ und $q = a_n p^n$ mit $a_n \in V$, also $qp^{-1} = a_n p^{n-1}$ für alle $n \geq 1$, d.h. $qp^{-1} \in \bigcap (p^n) = (q)$.

Daher ist $(q) = (qp^{-1})$, etwa $qb = qp^{-1}$. Dann ist

$q \notin (1-pb) = 0$, also $pb = 1$, d.h. $v(p) = 0$ ↯ .)

Ist nun $a \in K^*$, dann ist $a \notin (p^{n+1})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ min. Daher ist $a = p^n u$, $u \in V \setminus (p) = U$ und diese Darst. ist eindeutig: $p^n u = p^m v \Rightarrow p^{n-m} = v u^{-1} \in U$ also $n = m$, $u = v$. Damit ist $v(a) = n\, v(p)$ und die Bewertung diskret.

<u>Def</u> 5.10 Wir nennen Bewertungen $v_1, v_2$ auf $K$ äquiv., wenn es einen Ordnungsisom. $\Theta : v_1(K^*) \to v_2(K^*)$ gibt mit $v_2(x) = \Theta(v_1(x))$.

Es gilt offensichtlich:

<u>Satz</u> 5.11 Für jeden Körper $K$ ex. eine Bij. zwischen Äquiv. kl. von Bewertungen und Bewertungsringen in $K$. Dabei entsprechen diskr. Bewert. Hauptidealringen.

<u>Satz</u> 5.12 Die einzigen nicht-triv. Bewert. auf $\mathbb{Q}$ sind die p-adischen.