<u>Satz</u> 2.47 Ist R rechtsnoeth., dann ist für jeden endl. erz. R-Modul A $\quad wd\, A = hd\, A$.

<u>Bew:</u> Es gilt <u>immer</u> $hd(A) \geq wd(A)$,

also auch <u>immer</u> $w.gldim(R) \leq r\,gldim(R)$
$l\,gldim(R)$.

Ist nun R rechtsnoeth., A endl. erz. R-Modul, $n \leq hd\, A$, dann ex $B \in Mod_R$ mit $Ext^n_R(A,B) \neq 0$.

Weil $\mathbb{Z}$-Mod genug inj. hat, ex. div. ab. Gr C mit $Hom(Ext^n_R(A,B),C) \cong Tor^R_n(A, Hom(B,C)) \neq 0$

d.h. $wd\, A \geq n$.

<u>Kor</u> 2.48. Ist R rechtsnoeth., dann ist

$$r\,gldim(R) = w\,gldim(R) \leq l\,gldim(R).$$

Ist R noeth., dann gilt "=".

Später:

<u>Satz</u> 2.49 über induzierte Moduln.

§ 3 Kohomologie von Gruppen

Def 3.1 Eine Gr.erw. ist gegeben durch eine kurze ex. Seq $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \longrightarrow 1$, d.h.

$A \cong \ker \mu \trianglelefteq E$, $G \cong E/A$.

Zwei Erw. E, E' sind isom., falls Isom φ ex mit

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr] & & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \arrow[r] & 1 \\ & E' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Die mögl. Erw. wurden von Schreier beschrieben, wir werden insbes. zentrale Erw. (mit $A \leq Z(E)$) kohomol. beschreiben.

Wie bei Moduln heißt die Erw. zerfallend, wenn Hom $\alpha : G \to E$ ex. mit $\mu\alpha = id_G$, d.h. es gibt Repräs. für E/A, die Ugr. bilden.

Dann hat jedes $x \in E$ die Form $x = ga$ für ein $g \in G$ und g, a sind eind. $a \in A$,

Daher können wir E als Menge mit $G \times A$ identifiz., aber nicht unbed. als Gr.

Wir haben Homom $\alpha: G \to \operatorname{Aut} A$, $g \mapsto \kappa_g = [a \mapsto g^{-1}ag]$

Dann gilt $ag = g \cdot \kappa_g(a)$ und für die Multipl. auf E ergibt sich

$$(ga)(hb) = gh\,\kappa_h(a)\,b, \quad \text{d.h. } E \cong G \ltimes_\alpha A.$$

Umgekehrt def. jeder Homom $\alpha: G \to \mathrm{Aut}\, A$ eine Gr.str. auf $G \times A$ durch

$$(g,a)(h,b) = (gh, \alpha(h)(a)\, b).$$

Daher gilt:

<u>Satz</u> 3.2 Sind G, A Gr., $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$ ein Homom. dann ist $G \ltimes_\alpha A$ eine zerf. Erw. von A um G und alle zerf. Erw. entstehen auf diese Weise.

Welche weiteren Erw. gibt es für $1 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$?

<u>Def</u> 3.3. Sei $\alpha: G \to E$ ein (mengenth.) Schnitt für μ, d.h. $\mu\alpha = \mathrm{id}_G$, aber α nicht notw. Homom.

Für $a \in G$ setze $g_a = \alpha(a) \in E$, $g_1 = 1_E$.

Dann ist $g_a g_b A = g_{ab} A$, d.h. es ex $m_{a,b} \in A$ mit

(1) $$g_a g_b = g_{ab}\, m_{a,b}.$$

Wegen $g_1 = 1$ ist $m_{a,1} = m_{1,a} = 1$.

Die Menge $\{m_{a,b} \mid a, b \in G\}$ heißt Faktormenge für die Erw. E, und normalisiert falls $m_{a,1} = 1 = m_{1,a}$.

<u>Bem</u> 3.4. Wir erhalten einen Homom.

$$\Theta: G \longrightarrow \mathrm{Out}(A) = \mathrm{Aut}(A)/\mathrm{Inn}(A), \quad a \mapsto \kappa_{g_a} \mathrm{Inn}(A),$$

wobei $\kappa_x(y) = x^{-1} y x$.

D.h. es ist $\Theta(a)\, y = g_a^{-1}\, y\, g_a$ für $a \in G$, $y \in A$.

Wegen (2) $\Theta_a \Theta_b = \Theta_{ab}\, \kappa_{m_{b,a}}$ ist diese Abb. ein wohldef. Homom.

Ist A ab., dann ist $\mathrm{Inn}(A) = 1$ und

$\theta : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$, $a \longmapsto \kappa_{g_a}$

wohldefiniert. Im Folgenden setzen wir voraus, dass A ab. ist.

Wegen
$$g_a(g_b\, g_c) = g_a\, g_{bc}\, m_{b,c} = g_{abc}\, m_{a,bc}\, m_{b,c}$$
$$= (g_a\, g_b)\, g_c = g_{ab}\, m_{a,b}\, g_c = g_{ab}\, g_c\, \theta_c(m_{a,b})$$
$$= g_{abc}\, m_{ab,c}\, \theta_c(m_{a,b})$$
folgt für $a, b, c \in G$

(3) $$m_{a,bc}\, m_{b,c} = m_{ab,c}\, \theta_c(m_{a,b})$$

Sind umgekehrt für Gr. G, A, mit A ab. eine Abb $m : G^2 \longrightarrow A$ und ein Homom. $\theta : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ gegeben, die (1), (2) und (3) erfüllen, dann können wir auf $G \times A =: E$ eine Multipl. def durch

(4) $$(a, g)(b, h) = (ab,\, m_{a,b}\, \theta_b(g)\, h)$$

Die Bed. zeigen, dass dies eine Gr. st. auf E def., die Erw. von G um A ist mit Faktormenge $\{m_{a,b}\}$ und induz. Autom. θ_a.

(z.B ist $(a, g)(a^{-1}, \theta_a(m^{-1}_{a^{-1},a}\, g^{-1})) = (1, 1) = 1_E$)

Ist E eine Erw von G um A mit Schnitt $\{g_a\}$ und Faktormenge $\{m_{a,b}\}$ und $\{g'_a\}$ ein weiterer Schnitt, dann gilt $g'_a = g_a\, c_a$ für ein $c_a \in A$ und für die zu $\{g'_a\}$ geh. Faktormenge $\{m'_{a,b}\}$ gilt

$$\Theta'_a = \kappa_{c_a} \Theta_a \quad \text{und}$$

(5) $\quad m'_{a,b} = c_{ab}^{-1}\, m_{a,b}\, \Theta_b(c_a)\, c_b$, denn es ist

$$g_{ab} c_{ab} m'_{a,b} = g'_{ab} m'_{a,b} = g'_a g'_b = g_a c_a g_b c_b = g_a g_b \Theta_b(c_a) c_b$$

Die zugeh. Faktormenge $\{m'_{a,b}\}$ mit (5) heißt <u>assoziiert zu</u> $\{m_{a,b}\}$. Es gilt folgender Satz.

<u>Satz</u> 3.5 (Erweiterungssatz von Schreier) Seien G, A Gr., A abelsch. Für einen Homom. $\Theta: G \to \mathrm{Aut}(A)$, und Abb $m: G^2 \to A$, die (1)-(3) erfüllt, def (4) eine Gr.str. auf $G \times A$, die eine Erw. von G um A ist. Jede Erw entsteht auf diese Weise und Erw. sind isom. genau dann, wenn die zugeh. Faktormengen assoziiert sind.

<u>Bew</u>: Einiges müsste man noch nachrechnen...

Wir geben aber jetzt eine Kohomol. Interpretation, denn für A ab, $\Theta: G \to \mathrm{Aut}(A)$ wird A zu einem G- (bzw $\mathbb{Z}G$-) Modul.

<u>Erinnerung</u> $\mathbb{Z}G$ ist der freie $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis G, d.h. $x = \sum_{g\in G} a_g g$, wo endl. viele $a_g \neq 0$. Dieser Modul wird zum Gruppenring durch $(\sum a_g g)(\sum b_h h) = \sum_{g,h} a_g b_h gh$.

Die ab. Gr. A wird zum G-Modul durch einen Grphom. $G \to \mathrm{Aut}\, A$, bzw durch Ringhom. $\mathbb{Z}G \to \mathrm{End}\, A$.

In dieser Schreibweise wird (3) zu

(3') $\quad m_{a,bc} + m_{b,c} = m_{ab,c} + m_{a,b}^{\,c} \quad$ für $a,b,c \in G$

und (5) die Form

(5') $\quad m'_{a,b} = m_{a,b} + c_a^b + c_b - c_{ab}$.

Bem: Jedes Links-G-Modul wird auf kanon. Weise zum Rechts-G-Modul durch den kanon. Antiisom

$$\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G^{op}, \quad g \longmapsto g^{-1}.$$

Dann ist $ag = g^{-1}a$ für $g \in G$, $a \in A$.

Def 3.6 Sind A, B Rechts-G-Moduln, dann ist $\mathrm{Hom}(A,B)$ ein G-Modul durch

$$\varphi^g : a \longmapsto \varphi(ag^{-1})g, \qquad \varphi \in \mathrm{Hom}(A,B),\ g \in G.$$

D.h. $\varphi^g(ag) = \varphi(a)g$ und daher

$$\varphi^{gh}(agh) = \varphi(a)\,gh = \varphi^g(ag)h = (\varphi^g)^h(agh), \text{ also}$$

$\varphi^{gh} = (\varphi^g)^h$, also eine G-Modulstr. auf $\mathrm{Hom}(A,B)$

Ist A ein G-Modul, dann sei

$$A^G = \{x \in A \mid xg = x \text{ für alle } g \in G\},$$

der größte Untermodul von A mit triv. G-Wirkung.

Bsp 3.7 Sind A, B G-Moduln, dann ist $\mathrm{Hom}(A,B)$ ein G-Modul und $\mathrm{Hom}(A,B)^G = \mathrm{Hom}_G(A,B)$, d.h. die G-lin. Hom. von A nach B. Denn es ist für alle $g \in G$, $a \in A$

$$\varphi \in \mathrm{Hom}(A,B)^G \text{ gdw } \varphi^g = \varphi \iff \varphi^g(ag) = \varphi(ag) = \varphi(a)g$$

Insbesondere gilt für $\mathbb{Z}$ als triv. G-Modul

$$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) = (\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A))^G \simeq A^G.$$

Daher ist der Funktor $A \longmapsto A^G$ linksex. und wir können die Kohom.gr. definieren:

Def 3.8 Die n-te Kohomologiegr. von G mit Koeff. in A $H^n(G,A)$ ist def. als n-ter rechtsder. Funktor von $\_^G$, d.h. es ist $H^0(G,A)\left(= \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},A)\right) = A^G$

und $H^n(G,A) = \mathrm{Ext}^n_G(\mathbb{Z},A)$.

Entsprechend ist die n-te Homologiegr. von G mit Koeff. in A $H_n(G,A)$ def als

$$H_0(G,A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$$

$$H_n(G,A) = \mathrm{Tor}^G_n(\mathbb{Z},A).$$

Wir können $H_*(G,A)$ als deriv. Funktor von $-_G$ def., wobei A_G der größte Quotient von A mit triv. G-Wirk. ist:

Sei $\varepsilon: \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, $\sum_{s\in G} a_s s \mapsto \sum a_s$ der Augment.homom.

und $\ker \varepsilon =: JG$ das Augmentierungsideal.

Dann ist $0 \to JG \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$ split exakt als $\mathbb{Z}$-Moduln und durch Tensor. mit G-Modul A erhalten wir

$$0 \to (JG)A \to A \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to 0$$

d.h. $H_0(G,A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq A/(JG)A =: A_G$ ist der größte Quotient von A mit triv. G-Wirkung.

Es ist $(JG)A = \langle ga - a \mid a \in A, g \in G \rangle =: DA$.

Aus der Beschreibung $A_G = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ folgt, dass $-_G$ ein rechtsex. Funktor ist.

Zur Berechnung von $H^*(G,A)$ und $H_*(G,A)$:

Nach Def brauchen wir proj. Aufl. von $\mathbb{Z}$ als

$\mathbb{Z}G$ - Modul. Ist (P_i) eine solche Aufl., dann sind die $H^*(G,A)$ die Kohomol.gr. des Komplexes $(\mathrm{Hom}_G(P_i, A))$ und $H_*(G,A)$ die Homol.gr. des Komplexes $(P_i \otimes_G A)_i$.

Def. 3.9 Die Standard-Auflösung ist eine freie Aufl. von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}G$ - Modul; Sei X_n der freie $\mathbb{Z}$ - Modul mit Basis $(g_0, .. g_n) \in G^{n+1}$ und G - Wirkung $g(g_0, .. g_n) = (gg_0, .. , gg_n)$.

Def. Derivation $d_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ durch

$$d(g_0, .. g_n) = \sum (-1)^i (g_0, .. \hat{g}_i, .. g_n),$$

und $\varepsilon : X_0 \to \mathbb{Z}$ die Augmentierung, d.h. $\varepsilon(g_0) = 1$.

Dann ist der Komplex

$$\longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ex und die X_n sind freie $\mathbb{Z}G$ - Moduln mit Basis $(1, g_1, .. g_n) \in G^n$.

Für den Beweis der Exaktheit zeigen wir folgendes: Es ex. eine Homotopie $h : X_n \to X_{n+1}$ mit $dh + hd = 1$, d.h. (id_{X_n}) und (0_{X_n}) sind homotop und definieren daher nach Lemma 2.28 dieselben Homom. auf der Ebene der Homologiegr. Daher sind die Homol.gr. trivial und der Komplex ex. und $d^2 = 0$!

Setze $h_{-1}: \mathbb{Z} \longrightarrow X_0$, $1 \longmapsto 1$ und

$$h_n : X_n \longrightarrow X_{n+1}, (g_0, .. g_n) \longmapsto (1, g_0, .. g_n).$$

Dann ist $d_{n+1} h_n (g_0, .. g_n) = d(1, g_0, .. g_n)$

$$= (g_0, .. g_n) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} (1, g_0, .. \hat{g}_j, .. g_n)$$

und

$$h_{n-1} d_n (g_0, .. g_n) = h\left(\sum (-1)^j (g_0, .. \hat{g}_j, .. g_n)\right)$$

$$= \sum (-1)^j (1, g_0, .. \hat{g}_j, .. g_n)$$

Daher ist $d_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n = id_{X_n}$.

Es ist $\varepsilon d_1 (g_0, g_1) = \varepsilon (g_0 - g_1) = 1 - 1 = 0$

Weil $\{(1, g_0, .. g_n) \mid g_i \in G\}$ X_{n+1} als G-Modul erz,

ist $X_{n+1} \subseteq im(X_n)$ unter h_n.

Daher genügt es z.z. $d_n d_{n+1} h_n = 0$ für $n > 0$.

Nach Ind. vor. sei $d_{n-1} d_n = 0$. Dann ist

$$d_n d_{n+1} h_n = d_n (1 - h_{n-1} d_n)$$

$$= d_n - (d_n h_{n-1}) d_n = d_n - (1 - h_{n-2} d_{n-1}) d_n$$

$$= h_{n-2} d_{n-1} d_n = 0.$$

Daher ist (X_n) ein freier $\mathbb{Z}G$-Komplex und die Exaktheit ebenfalls bewiesen.