Symmetriegründen gilt

$$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{f_2(a)}{f_1(x)} =: c \text{, d.h. (iii) gilt.}$$

(iii) ⇒ (i): Wenn (iii) gilt, dann folgt

$$|a_n|_1 \to 0 \Leftrightarrow |a_n|_2 \to 0 \text{, also (i).}$$

<u>Ziel</u>: Fortsetzungen von Bewertungen und Absol. betr. auf Körpererw. untersuchen.

<u>Erinnerung</u>: Ist L/K endl. Körpererw., etwa $[L:K]=n$, dann ist für $a\in L$, $\lambda_a : L\to L$, $x\mapsto a\cdot x$ K-lin.
Daher ist $\lambda: L\to GL_n(K)$, $a\mapsto \lambda_a$ wohldef.
und es ist $N_{L/K}(a) = \det(\lambda_a)$ die <u>Norm</u> von a
(und $T_{L/K}(a) = \mathrm{spur}(\lambda_a)$ die Spur von a).

Es gilt $N_{L/K}(ab) = N_{L/K}(a)\cdot N_{L/K}(b)$.

Ist L/K, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, dann ist $N_{L/K}(a) = \prod_{\sigma\in G}\sigma(a)$.

<u>Satz</u> 5.22 Sei $|.|$ ein Abs. betrag auf K,
K vollst. bzgl $|.|$ und L/K endl. Wenn $|.|$ sich auf L zu einem Absbetrag fortsetzen lässt, dann ist diese Fortsetzung eind. und gegeben durch

$$|a| = |N_{L/K}(a)|^{1/[L:K]}.$$

Dann ist L bzgl. der Fortsetzung ebenfalls vollst.

Für den Beweis brauchen wir einen Satz über normierte VR:

<u>Def</u>. 5.23 Sei K ein Körper mit Absbetrag $|.|$.
Dann heißt ein K-VR V normiert, wenn es eine

Abb. $\|\;\|: V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ gibt, so dass gilt:

(i) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, $x, y \in V$

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $x \in V$, $\alpha \in K$

(iii) $\|x\| \ge 0$ für $x \in V$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bsp (i) Jede Körpererw. L/K mit einem Absbetrag, der den von K fortsetzt.

(ii) Ist V endl. dim mit Basis $e_1, .. e_n$, dann def für $x = \sum_i \alpha_i e_i$ die Abb $\|x\| = \max\{|\alpha_i|\}$ eine Norm, die kubische Norm (bzgl $e_1, .. e_n$) oder Max.norm,

Prop 5.24 Sei V ein norm. VR über K, wobei K bzgl $|\;|$ vollst. sei. Ist V endl.dim., dann ist V vollst bzgl $\|\;\|$ und die Topol. auf V ist durch eine kub. Norm gegeben (und daher eind. bestimmt)

Bew: Sei $e_1, .. e_n$ eine K-Basis für V. Zeige zuerst: V ist vollst bzgl kub. Norm: Sei $x_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} e_i$ eine Cauchy-Folge in V, also $\|x_k - x_m\| \to 0$ und daher $|\alpha_{ik} - \alpha_{im}| \to 0$ für $i = 1, .. n$. Weil K vollst. ist bzgl $|\;|$, ex $\alpha_i = \lim \alpha_{ik}$. Setze $x = \sum_i \alpha_i e_i$. Dann ist $\|x - x_k\| \to 0$, d.h. (x_n) konvergiert gegen x.

Nun sei $N(x)$ eine bel. Norm auf V. Wir zeigen, dass N dieselbe Topol. induziert wie die kub. Norm $\|\;\|$.

Bew durch Ind. über $\dim V$. Klar für $\dim V = 1$.

Es ist für $x = \sum \alpha_i e_i$

$$N(x) \le \sum_i N(\alpha_i e_i) = \sum_i |\alpha_i| N(e_i) \le \|x\| \sum_i N(e_i).$$

d.h. für $c = \sum_i N(e_i)$ gilt $N(x) \leq c \cdot \|x\|$.

Daher folgt aus Konv. bzgl. $\|.\|$ die Konv. bzgl N, und damit ist die kub. Topol. feiner als die von N induz.

Sei nun umgekehrt (x_n) eine Nullfolge bzgl N, d.h. $N(x) \to 0$. Es genügt z.z. $\|x_n\| \to 0$. Sei $x_k = \sum_i \alpha_{ik} e_i$, also $\|x_k\| = \max_i \{|\alpha_{ik}|\}$. Ist $|\alpha_{ik}| \to 0$ für alle i, dann ist $\|x_n\| \to 0$. Sonst ex ein i mit $|\alpha_{ik}| \not\to 0$ OBdA $i = 1$ und $|\alpha_{ik}| \geq \varepsilon$ für alle k (durch Übergang zu Teilfolge). Setze $y_k = (\alpha_{1k})^{-1} x_k = \sum_i \beta_{ik} e_i$ mit $\beta_{1k} = 1$ nach Konstr. Dann ist

$$N(y_k) = |\alpha_{1k}|^{-1} N(x_k) \leq \varepsilon^{-1} N(x_k), \text{ also } N(y_k) \to 0.$$

Daher ist $\lim_k \sum_{i=2}^{n} \beta_{ik} e_i = -e_1$.

Nach Ind. voraus ist die Topol. auf $\langle e_2, .. e_n \rangle$ eind. bestimmt und vollst., also abg. in V und daher $-e_1 \in \langle e_2, .. e_n \rangle$ $\lightning$.

Damit können wir Satz 5.22 beweisen.

Bew (Satz 5.22) Sei $|.|$ der Abs. betrag auf K und seien $\|.\|_1, \|.\|_2$ Absbeträge auf L, die $|.|$ fortsetzen. Nach Prop 5.24 induz. $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ dieselbe Topol. auf L und L ist vollst. Ist $|.|$ trivial, dann sind auch $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ trivial. Sonst ex. ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $\|x\|_1 = \|x\|_2^c$ für alle $x \in L$ gilt und es gibt $a \in K$ mit $|a| \neq 0, 1$. Für $x = a$ folgt $c = 1$, d.h. $\|.\|_1 = \|.\|_2$.

Noch z.z. $|a| = |N_{L/K}(a)|^{1/[L:K]}$ ist dieser Abs. betrag.

Sonst ex $a = \sum' \kappa_i e_i$ mit $|a^n| \neq |N_{L/K}(a)|$.

O.B.d.A $|a^n| < |N_{L/K}(a)|$ (sonst wähle a^{-1}).

Setze $b = a^n / N_{L/K}(a)$, also $|b| < 1$, $N_{L/K}(b) = 1$.

Wegen $|b| < 1$ ist $\lim b^n = 0$.

Ist $b^k = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} e_i$, dann ist $\beta_{ki} \to 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Die Normabb. ist polyn. Abb von $K^n \to K$ und daher stetig und es folgt $1 = N_{L/K}(b^n) \to 0$ $\lightning$.

<u>Bem:</u> Ist $[L:K] = 2$, dann kann man direkt nachrechnen, dass $|a| = |N_{L/K}(a)|^{\frac{1}{2}}$ einen Abs. betrag def.

Für archim. bewert. Körper sagt der zweite Satz von Ostrowski, dass $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ die einzig. Körper sind, die bzgl eines archim. Abs. betrags vollst. sind. Daher gilt in diesem Fall die Forts. eigenschaft trivialerweise. Im weiteren untersuchen wir daher nicht-archim. Abs. beträge, und äquiv. dazu Forts. von Bewertungen. Dafür betrachten wir Bewert. als 'Stellen'.

<u>Def</u> 5.25 Sei K ein Körper. Eine <u>Stelle</u> von K in einem Körper k ist eine Abb $\varphi: K \to k \cup \{\infty\}$, so dass $\varphi^{-1}(k) = V \subseteq K$ ein Unterring und $\varphi|_V$ ein Ringhomom. ist.

<u>Bsp</u>: Ist (K, v) ein bewert. Körper mit Bew-ring V und Res. körper $K_v = V/\mathfrak{m}$, dann def. $\bar{v}: K \to K_v \cup \infty$ eine Stelle mit $\bar{v}(x) = \infty$ für $x \notin V$.

Ist umgekehrt φ eine Stelle von K in k, $V = \varphi^{-1}(k)$, denn ist für $x \notin V$ jedenfalls $x^{-1} \in V$ (denn sonst wäre $1 = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \infty \cdot \infty \cdot \infty$ {}), d.h. V ist Bewert.ring und $\varphi|_V : V \to V/\mathfrak{m}$ Restklassenhomom.

Zwei Stellen φ_1, φ_2 heißen äquiv., wenn es einen Körperisom $\alpha : k_1 \to k_2$ gibt mit $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$, d.h. wenn sie dieselbe Bewertung def. Es gilt also:

<u>Prop 5.26</u>: Die Bewertungen auf K entsprechen genau den Stellen auf K, wobei äquiv. Bewert. äquiv. Stellen entsprechen.

Damit werden wir zeigen, dass sich Bewert. immer auf Körpererw. fortsetzen lassen.