dann ist für $x \notin V$ jedenfalls $x^{-1} \in V$ (denn sonst wäre $1 = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \infty \cdot \infty = \infty$ ↯), d.h. V ist Bewert.ring und $\varphi|_V : V \to V/\mathfrak{m}$ Restklassenhomom.

Zwei Stellen φ_1, φ_2 heißen äquiv., wenn es einen Körperisom $\alpha : k_1 \to k_2$ gibt mit $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$, d.h. wenn sie dieselbe Bewertung def. Es gilt also:

Prop 5.26: Die Bewertungen auf K entsprechen genau den Stellen auf K, wobei äquiv. Bewert. äquiv. Stellen entsprechen.

Damit werden wir zeigen, dass sich Bewert. immer auf Körpererw. fortsetzen lassen.

Dazu brauchen wir einige Vorüberlegungen:

Def 5.27 Ist R nullteilerfreier komm. Ring, $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ ein Primideal, dann ist $S = R \setminus \mathfrak{p}$ multipl. abg. und ist K der Quotientenkörper von R, dann heißt

$$R_S = R_{\mathfrak{p}} = \{x \in K \mid x = \frac{a}{s},\ a \in R, s \in S\}$$

die Lokalisierung von R an $\mathfrak{p}$. Insbes. ist $R_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring.

Lemma 5.28 (Chevalley) Sei K ein Körper, $R \subseteq K$ ein Unterring, $0 \neq \mathfrak{a} \trianglelefteq R$ ein echtes Ideal, $c \in K^*$. Dann ist entweder $\mathfrak{a}R[c] \trianglelefteq R[c]$ oder $\mathfrak{a}R[c^{-1}] \trianglelefteq R[c^{-1}]$ ein echtes Ideal.

Bew: Andernfalls ex $a_i, b_j \in \mathfrak{a}$ mit

$$1 = \sum_{i \leq m} a_i c^i \quad \text{und} \quad 1 = \sum_{j \leq n} b_j c^{-j}$$

mit m, n min. OBdA $m \geq n$.

Durch Multipl. mit c^m ist dann

$$(1-b_0)c^m = \sum_{i=1}^{n} b_i c^{m-i} \quad , \qquad \text{und}$$

$$1-b_0 = (1-b_0)\sum_{i\leq m} a_i c^i$$

$$= (1-b_0)\sum_{i<m} a_i c^i + (1-b_0)a_m c^m$$

$$= (1-b_0)\sum_{i<m} a_i c^i + a_m \sum_{i=1}^{n} b_i c^{m-i} \quad \lightning$$

zur Minimalität von m.

<u>Satz</u> 5.29 Ist R_0 Unterring eines Körpers K, $\varphi: R_0 \to L = \tilde{L}$ ein Ringhomom. in einen alg. abg. Körper L, dann kann φ zu einer Stelle $\bar{\varphi}: K \to L$ fortges. werden.

<u>Bew</u>: Nach Zorns Lemma gibt es eine max. Forts. $\bar{\varphi}$ von φ auf einen Unterring $R \supseteq R_0$. Es genügt z.z., dass R ein Bewert.ring ist.

Sei $\mathfrak{p} = \ker\bar{\varphi}$. Weil L Körper ist, ist $\mathfrak{p}$ Primideal.

<u>Beh</u>: R ist lok. Ring mit max. Ideal $\mathfrak{p}$.

Sonst gibt es ein $b \in R\setminus\mathfrak{p}$, das nicht invertierbar ist in R. Dann ist $\bar{\varphi}(b) \neq 0$ und $R' = \{ab^{-k} \mid a \in R, k \geq 1\} \supsetneq R$ ein echt größerer Unterring, auf den sich $\bar{\varphi}$ kanonisch fortsetzen lässt. $\lightning$ zur Max. von R.

Daher ist $R/\mathfrak{p}$ ein Körper und $L' = \bar{\varphi}(R)$ ein Unterkörper von L. Ist R kein Bewert.ring, dann ex $c \in K^*$ mit $c, c^{-1} \notin R$. Dann ist nach Lemma 5.28 aber oBdA $\mathfrak{p}R[c] \neq R[c]$.

Betrachte die Polynomringe $R[X]$ und $L[X]$ und $\bar{\varphi}$ als Epim. von $R \to L'$. Dann ex. Forts. $\varphi : R[X] \to L'[X]$ mit $\bar{\varphi}(x) = x$.

Sei $Z = \{ f \in R[X] \mid f(c) = 0 \}$, $Z' = \bar{\varphi}(Z) \trianglelefteq L'[X]$ Ideal.

<u>Beh</u>: $Z' \triangleleft L'[X]$.

<u>Bew</u>: Sonst ex $f(x) = \sum_i a_i x^i$, $a_i \in R$ mit $f(c) = 0$ und $\sum_i \varphi(a_i) x^i = 1$. Dann ist $\bar{\varphi}(a_0) = 1$, $\bar{\varphi}(a_i) = 0$ für $i > 0$, d.h. $a_0 = 1 - m_0$, $a_i = m_i$ für $m_0, m_i \in \mathfrak{p}$.
Wegen $\sum_{i=0}^{n} a_i c^i = 0$ folgt dann $1 \in \mathfrak{p} R[c]$. ↯

Daher ist $Z' \triangleleft L'[X]$, $Z' = (g(X))$, wobei entweder $g(x) = 0$ oder $g(x)$ norm. Polynom mit $\deg g > 0$.
Ist $g(x) = 0$, setze $r \in L$ bel., sonst wähle $r \in L$ mit $g(r) = 0$. Nun gibt es einen Homom. $\bar{\bar{\varphi}} : R[X] \to L'[X] \to L$ durch Einsetzen, d.h. $\bar{\bar{\varphi}}(f(x)) = f(r)$.
Daher ist $\bar{\bar{\varphi}}(Z) = 0$ und wir haben einen Homom. $\tilde{\varphi} : R[X]/Z \to L$. Weil Z das Verschwindungsideal von c ist, erhalten wir einen Homom. $\tilde{\varphi} : R[c] \to L$ ↯ zur Max. von $\bar{\varphi}$ auf R.

<u>Kor</u> 5.30 Ist (K, v) ein bewert. Körper, L/K beliebige Körpererw., dann lässt sich v auf L fortsetzen.

<u>Bew</u>: Sei $\varphi : K \to K_0 \cup \infty$ die zu v gehörige Stelle, $V = \varphi^{-1}(K_0)$. Dann lässt sich $\varphi : V \to K_0$ zu einer Stelle von L in K_0 fortsetzen. Die zugeh.

Bewertung von L ist Forts. von v.

<u>Kor</u> 5.31 Ist (K, v) ein reell-bew. Körper, K vollst (bzgl $|\ |_v$) und L/K eine endl. Erw. Dann ex eine eind. Forts. w von v auf L und es ist

$$w(a) = \frac{1}{[L:K]}\, v(N_{L/K}(a)) \quad \text{und } L \text{ vollst.}$$

<u>Bew</u>: Nach Kor. 5.30 lässt sich v forts. Der zugeh. Abs. betrag $|.|_w$ auf L ist dann eine Forts. von $|.|_v$ und daher folgt die Beh. aus Satz 5.23.

<u>Def</u> 5.32 Seien (K,v), (L,w) bewert. Körper mit Bew.ringen V bzw. W und max. Idealen $\mathfrak{m}$ bzw $\mathfrak{m}'$.
Dann ist $\Gamma = v(K) \leq w(L) = \Delta$ und
$e = [\Delta : \Gamma]$ heißt der <u>Verzweigungsindex</u>.
Wegen $\mathfrak{m}' \cap V = \mathfrak{m}$ ist der natürl. Homom

$$K_v = V/\mathfrak{m} \longrightarrow W/\mathfrak{m}' = L_w \text{ eine Einbett. der}$$

Res. körper und

$$f = [L_w : K_v] \text{ heißt Residuengrad der Erweiterung.}$$

<u>Bem</u>: Offens. sind Verzw. index und Res. grad multipl.

<u>Bsp</u>: $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Die 2-ad. Bew. hat genau eine Forts. mit $e = 2$, $f = 1$, nämlich $w(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$.
Ist $p \neq 2$ prim, $x^2 \equiv 2 \bmod p$ hat Lösung, dann ist 2 ein Quadrat in $\mathbb{Q}_p$ und es gibt zwei Forts. mit $e = f = 1$.

Ist $x^2 \not\equiv 2 \mod p$ für $x \in \mathbb{Z}$, dann gibt es nur eine Forts. mit $e=1$, $f=2$ und $L_w = \mathbb{F}_p(\sqrt{2})$.

<u>Lemma</u> 5.33 Sind $u_1, .. u_r \in W$ so, dass $\bar{u}_1 .. \bar{u}_r \in L_w$ lin. unabh. über K_v sind, dann gilt für $\alpha_1, .. \alpha_r \in K$

$$w\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i\right) = \min_i \{v(\alpha_i)\}.$$

<u>Bew</u>: OBdA $v(\alpha_1) = .. = v(\alpha_k) < v(\alpha_j)$ für $j > k$, d.h. $\alpha_i/\alpha_1 \in V$ für $i = 1, .. r$.

Wegen $\bar{u}_i \neq 0$ ist dann $w(u_i) = 0$, daher

$$w\left(\sum \alpha_i u_i\right) \geq v(\alpha_1).$$

Wäre $w(\sum \alpha_i u_i) > v(\alpha_1)$, dann ist $w(u_1 + \sum' \frac{\alpha_i}{\alpha_1} u_i) > 0$ und daher $\bar{u}_1 + \sum' \overline{\alpha_i/\alpha_1}\, \bar{u}_i = 0$ in L_w $\lightning$ $\bar{u}_i$ lin. unabh. über K_v.

<u>Satz</u> 5.34 Seien $(K, v), (L, w)$ bew. Körper, L/K Körpererw. vom Grad n, $w|_K = v$. Dann gilt

(*) $e \cdot f \leq n$.

Weiterhin gilt: Ist v reell-wertig, diskret, bzw. trivial, dann auch w. Ist (K, v) vollst. und diskret, dann gilt sogar $e \cdot f = n$.

<u>Bew</u>: Seien wie vorher V bzw W Bewert. ringe von v, w, $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ die zugeh. max. Ideale (also $W \cap K = V$). Seien $u_1, .. u_r \in W$ so, dass $\bar{u}_1, .. \bar{u}_r \in W/\mathfrak{m}' = L_w$ lin. unabh. über K_v sind und wähle $\pi_1, .. \pi_s \in L$ mit $w(\pi_i)\Gamma \neq w(\pi_j)\Gamma$ für $i \neq j$, $\Gamma = v(K)$.

Beh: Die $u_i\pi_j$, $i=1,\dots r$, $j=1,\dots s$ sind lin. unabh. $/K$.

Damit folgt $(*)$ für $e=s$, $r=f$.

Bew des Beh. Andernfalls ex $\alpha_{ij}\in K$ mit $\sum_{i,j}\alpha_{ij}u_i\pi_j=0$

Setze $\alpha_j=\sum_i u_i\alpha_{ij}$, also $\sum_j \alpha_j\pi_j=0$.

Sind alle $\alpha_j=0$, dann folgt aus Lemma 5.33 $\alpha_{ij}=0$ für alle i,j und daher $(*)$.

Sind nicht alle $\alpha_j=0$, dann folgt aus Bem 5.4.(iii)

$$w(\alpha_h\pi_h)=w(\alpha_k\pi_k) \text{ für geeignete } h\neq k\leq s.$$

Dann ist $w(\pi_h/\pi_k)=w(\pi_h)-w(\pi_k)\in\Gamma$. $\lightning$.

Nach Def von e folgt $e\cdot\Delta\subseteq\Gamma$ für $\Delta=w(L)$. Ist $\Gamma\leq\mathbb{R}$, dann auch Δ. Ist $\Gamma\leq\mathbb{Z}$, dann durch Normal.

$\Gamma\subseteq e\mathbb{Z}$, also $e\Delta\subseteq e\mathbb{Z}$, d.h. $\Delta\subseteq\mathbb{Z}$.

Ist v trivial, dann ist $\Gamma=0$, also auch w trivial.

Sei nun für die letzte Beh. K vollst und diskret bewert.

Dann ist auch L vollst. nach Satz 5.31.

Seien nun π,Π uniform. Elem. für v bzw w. Jedes $x\in L$ lässt sich schreiben als $x=\sum_{i=-N}^{\infty}x_i\Pi^i$ mit $w(x_i)=0$.

Wegen $\Pi^e\in\Gamma$ können wir anstelle der Π^i auch

$\pi^i, \Pi\pi^i, \dots \Pi^{e-1}\pi^i$ verwenden, und die x_i mithilfe einer K_v-Basis für L_w $\bar u_1,\dots \bar u_f$ durch die zugehörige Urbilder $u_1,\dots u_f\in W$ ausdrücken.

Man erhält dann

$$x=\sum_{i\geq -N}\sum_{\alpha_{\mu\nu i}}\alpha_{\mu\nu i}u_\mu\Pi^\nu\pi^i,\quad \alpha_{\mu\nu i}\in K,\ \mu\leq f,\ \nu\leq e.$$

D.h. L wird als K-VR durch die $u_\mu \pi^\nu$, $\mu \le f$, $\nu \le e$ aufgespannt. Daher ist $[L:K] \le e \cdot f$ und die Beh. folgt aus $(*)$.

Wir wollen die Brauergr. von lokalen Körpern bestimmen, das sind vollst. diskr. bew. Körper mit endl Res. körper. Dazu brauchen wir Hensels Lemma:

__Satz__ 5.35 Sei (K,v) ein vollst. diskr. bew. Körper mit Bew ring V, $\mathfrak{m} \triangleleft V$ max Ideal, $K_v = V/\mathfrak{m}$. Ist $f(x) \in V[X]$ ein norm. Polynom, $\bar{f}(x) = \bar{\gamma}(x) \cdot \bar{\delta}(x)$ in $K_v[X]$ mit $\bar{\gamma}, \bar{\delta}$ normiert und $ggT(\bar{\gamma}, \bar{\delta}) = 1$, dann ex norm. Polyn. $g, h \in V[X]$ mit $\bar{g} = \bar{\gamma}$, $\bar{h} = \bar{\delta}$, $f(X) = g(X) \cdot h(X)$.

Für den Beweis betrachten wir erst den folgenden Fall:

__Lemma__ 5.36 Ist mit denselben Annahmen wie in Satz 5.35 $f(X) \in V[X]$ normiert und irred., dann ex ein irred. Polynom $\bar{g}(X) \in K_v[X]$ mit $\bar{f} = \bar{g}^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

__Bew__: Sei L Zerf.körper von f über K. Dann hat $|\cdot|_v$ eine eind. Forts. $|\cdot|_w$ auf L. Sei W der zugeh. Bew.ring, $\mathfrak{m}'$ das max. Ideal. Für $a \in L$, $\sigma \in Gal(L/K)$ ist $N_{L/K}(a) = N_{L/K}(\sigma(a))$, also $|\sigma(a)| = |a|$ und daher $\sigma(W) = W$, $\sigma(\mathfrak{m}') = \mathfrak{m}'$, d.h. σ induz. einen Autom. $\bar{\sigma}$ von L_w über K_v, d.h. $\bar{\sigma} \in Gal(L_w/K_v)$.

Sei $f(x) = \prod(x - \alpha_i)$ mit $\alpha_i \in L$, $a_n := f(0) = \prod(-\alpha_i)$.

Dann ist $N_{L/K}(\alpha_i) = ((-1)^n a_n)^m$ mit $m = [L:K]/n$.

Wegen $a_n \in V$ folgt $|\alpha_i| \leq 1$, d.h. $\alpha_i \in W$.

Es ist $\bar{f}(x) = \prod (x - \bar{\alpha}_i)$ in $L_w[X]$. Da $f \in K[X]$ irred ist, ex für α_i, α_j ein $\sigma \in Gal(L/K)$ mit $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$. Dann ist $\overline{\sigma(\alpha_i)} = \bar{\alpha}_j$, d.h. $\bar{\alpha}_i$ und $\bar{\alpha}_j$ haben dasselbe Minpol. $\bar{g}/K_0$. Daher ist $\bar{f}$ Potenz von $\bar{g}$ und die Beh. bewiesen.

Damit folgt Satz 5.35 (Hensels Lemma):

Bew: Sei $f(x) = \prod_{i=1}^{k} f_i(x)^{m_i}$ mit $f_i \in V[X]$ p.w. verschiedene irred. norm. Faktoren. Nach Lemma 5.36 ist $\bar{f}_i(x) = g_i(X)^{r_i}$ mit $g_i \in K_0[X]$ irred. und normiert. Dann ist $\bar{f} = \prod \bar{g}_i^{r_i m_i}$ und wegen $ggT(\bar{\gamma}, \bar{\delta}) = 1$, können wir (O.BdA) schreiben

$$\bar{\gamma}(X) = \prod_{i=1}^{l} \bar{g}_i(X)^{r_i m_i}, \quad \bar{\delta}(X) = \prod_{i=l+1}^{k} \bar{g}_i^{r_i m_i}$$

Setze $g(x) = \prod_{i=1}^{l} f_i^{m_i}$, $h(x) = \prod_{j=l+1}^{k} f_j(x)^{m_j}$.

Bem: Hensels Lemma gilt viel allgemeiner:

(i) Sei (K, v) ein bewert. Körper mit der Eigenschaft, dass für jede endl. Körpererw L/K eine eind. Forts. von v ex., V Bew.ring von K, $f \in V[X]$ mit $\bar{f} = \bar{\gamma} \cdot \bar{\delta}$ in $K_0[X]$ mit $ggT(\bar{\gamma}, \bar{\delta}) = 1$, $\deg(\gamma) > 0$. Dann ex. $g, h \in V[X]$ mit $f = g \cdot h$, $\bar{g} = \bar{\gamma}$, $\bar{h} = \bar{\delta}$ und $\deg g = \deg \bar{\gamma}$.

(iii) Vollst. reell bewert. Körper erfüllen die Voraus. in (ii)

Körper, in denen Hensels Lemma gilt, heißen <u>Henselsche Körper</u>. Dies sind genau die, die eine eind. Forts. der Bewert. auf jede endl. Körpererw. besitzen.

<u>Kor</u> 5.37. Seien (K, v), V, $\mathfrak{m}$ wie in Hensels Lemma. Wenn $\bar{f}(x) \in K_v[X]$ eine einf. Nst. $\bar{\rho} \in K_v$ besitzt, dann hat $f(x) \in V[X]$ eine Nst. $r \in V$ mit $\bar{r} = \rho$.

<u>Bew</u>: Es ist $\bar{f}(x) = (x - \bar{\rho})\,\bar{\delta}(x)$ mit $\bar{\delta}(\rho) \neq 0$. Daher ist $ggT(x - \bar{\rho}, \bar{\delta}(x)) = 1$, und die Beh. folgt aus Hensels Lemma.

<u>Def</u> 5.38 Ein bew. Körper (K, v) heißt <u>lokaler Körper</u>, wenn K_v endl, K bzgl $|\ |_v$ vollst und die Bew. v diskret und nicht-triv. ist.

<u>Bsp</u>: $\mathbb{Q}_p$, $K((X))$ für endl. Körper K:

~~auf jede endl. Körpererw. besitzen.~~

<u>Def</u> 4.46 Ein bew. Körper (K, v) heißt <u>lokaler Körper</u>, wenn gilt: (i) K_0 ist endl.

(ii) K ist bzgl $|\,|_v$ vollst.

(iii) die Bewertung ist diskret und nicht-trivial.

<u>Bsp</u>: $\mathbb{Q}_p$, $K((x))$ K endl. Körper:

Für $K(X)$ mit abs. Betrag $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|_\infty = 2^{\deg f - \deg g}$

$= 2^{-v_\infty(\frac{f}{g})}$

erhält man als Vervollständigung den Körper der formalen Laurent-Reihen, d.h Reihen der Form $\sum_{i\geq -n}^{\infty} a_i x^i$. (Dies ist der Quot.körper von $K[[X]]$, dem Ring der formalen Potenzreihen.). Dann ist $v(f) = n$. Es ist der Bew.ring $\simeq K[[X]]$ und der Restklassenkörper $\simeq K$.

<u>Bem</u>: Offens. ist jede endl. Erw. eines lokalen Körpers wieder lokal. Es gilt

<u>Lemma</u> 4.47 Sei K ein lok. Körper mit $K_0 \simeq \mathbb{F}_q$. Dann enthält der Bew.ring V q versch. Wurzeln für $x^q - x = 0$ und diese Elte sind ein Repräsent.system für $V/\mathfrak{m}$ als add. Gr.

<u>Bew</u>: Aus Alg. I wissen wir, dass $\mathbb{F}_q$ Zerf.körper von $x^q - x$ über dem Primkörper ist. Ist $\xi_0 \in \mathbb{F}_q \simeq V/\mathfrak{m}$, dann ex. nach Kor. 4.35 ein $\xi \in V$ mit $\xi^q = \xi$ und

$\bar{\varrho} = \varrho + \mathfrak{m} = \varrho_0$. Ist $\varrho_0' \neq \varrho_0$, $\varrho_0' \in \mathbb{F}_q$, $\varrho' \in V$ mit $\varrho'^q = \varrho'$ mit $\varrho' + \mathfrak{m} = \varrho_0'$, dann sind ϱ_0', ϱ_0 offens. in versch. Nebenklassen und wir erhalten das gesuchte Repräs. system $\varrho_1, \dots, \varrho_q$.

Sei nun $\Lambda = \{\varrho_1, \dots, \varrho_q\} \subseteq V$ ein Repräs. system für $V/\mathfrak{m}$, sei $\pi \in \mathfrak{m}$ mit $(\pi) = V(\pi) = \mathfrak{m}$. Dann ist $\langle v(\pi) \rangle = v(K^*)$ sei π_k mit $v(\pi_k) = k$. OBdA $v(\pi) = 1$.

<u>Lemma</u> 4.48 Jedes $a \in K^*$ lässt sich eind. schreiben als

$$a = \alpha_{k_1} \pi_{k_1} + \alpha_{k_2} \pi_{k_2} + \dots$$

mit $\alpha_i \in \Lambda$, $k_1 < k_2 < \dots$, $\alpha_k \neq 0$.

<u>Bew</u>: Sei $v(a) = k_1 = v(\pi_{k_1})$. Dann ist $a \pi_{k_1}^{-1} \in V \setminus \mathfrak{m}$, d.h. es ex $\alpha_{k_1} \neq 0$, $\alpha_{k_1} \in \Lambda$ mit $a \pi_{k_1}^{-1} \equiv \alpha_{k_1} \bmod \mathfrak{m}$. Dann ist $v(a - \alpha_{k_1} \pi_{k_1}) > v(a)$. Induktiv erhalten wir $k_1 < k_2 < \dots$ und $\alpha_{k_i} \in \Lambda$, $\alpha_{k_i} \neq 0$ mit

$$v(a) < v(a - \alpha_{k_1} \pi_{k_1}) < v(a - \alpha_{k_1} \pi_{k_1} - \alpha_{k_2} \pi_{k_2}) \dots$$

Die Eindeutigkeit ist klar.

<u>Def</u> 4.49 Ist $K_0 \subset K$ ein Teilkörper mit (i) $K_0 \supseteq \Lambda$ (ii) K_0 abg. in der durch v induz. Top. auf K und (iii) $K_0 \cap \mathfrak{m} \neq 0$, dann sei $V_0 = V \cap K_0$, $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m} \cap K_0$. Ein Polynom $f(x) = \sum b_i x^{n-i} \in V_0[x]$ heißt <u>Eisenstein-Polynom</u> in $V_0[x]$, falls $b_i \in \mathfrak{m}_0$ und $b_n \notin \mathfrak{m}_0^2$. Es gilt:

<u>Lemma</u> 4.50 Ist K_0 ein Teilkörper des lok. Körpers K wie in 4.49 und sei $\pi \in V$ mit $(\pi) = \mathfrak{m}$. Dann ist $K = K_0(\pi)$, π ist alg. über K_0 und das Min.pol. von π über K_0 ist ein Eisenstein-Polyn. über $V_0 = V \cap K_0$.

<u>Bew</u>: Offens. ist auch K_0 lokal; sei $\mathfrak{m}_0 = (\pi_0)$, $\mathfrak{m} = (\pi)$, dann ex $e \geq 1$ mit $v(\pi_0) = v(\pi^e)$. Für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k = e \cdot m + r$ und $0 \leq r \leq e-1$, ist für $\pi_k = \pi_0^m \pi^r$ dann $v(\pi_k) = k v(\pi)$.
Nach Lemma 4.48 kann jedes $a \in K^*$ eind. geschr. werden mithilfe dieser π_k und für $a \in V$ ist dann $k_i \geq 0$.
Daher erhalten wir durch Umordnen

$$a = a_0 + a_1 \pi + \ldots + a_{e-1} \pi^{e-1}$$

wobei jedes $a_i = \sum \alpha_m \pi_0^m$. Für $a \in V$ ist $m \geq 0$, d.h. $a_i \in V_0$. Daher ist $v(a_i \pi^i) = v(\pi^{em+i})$.
Daher ist $v(a_i \pi^i) \neq v(a_j \pi^j)$ für $0 \leq i \neq j \leq e-1$.
Also folgt aus $\sum a_i \pi^i = 0$ schon $a_i = 0$, d.h. $(1, \pi, \ldots \pi^{e-1})$ ist Basis für K/K_0, d.h. $K = K_0(\pi)$.
Für $a = \pi^e$ ist daher π alg. mit Min.pol. der Form $f(x) = x^e + b_1 x^{e-1} + \ldots + b_e$ mit $b_i \in V_0$.
Daher ist $N_{K/K_0}(\pi) = (-1)^{e-1} b_e$ und $v(b_e) = v(N_{K/K_0}(\pi)) = v(\pi^e)$

$$= v(\pi_0)$$

d.h. $b_e \in \mathfrak{m}_0 \setminus \mathfrak{m}_0^2$.
Ang. ein $b_i \notin \mathfrak{m}_0$. Dann ist $\bar{f}(x) = \bar{g}_0(x) x^j$ in $(V_0/\mathfrak{m}_0)[x]$ mit $j \geq 1$ und $x \nmid \bar{g}_0(x)$. Nach Hensels Lemma ist dann $f(x)$ reduzibel $\lightning$ also $b_i \in \mathfrak{m}_0$, d.h. f Eisenstein.

Satz 4.51 Jeder lokaler Körper K ist entweder eine endl. Erw. von einem p-adischen Körper oder ein Körper formaler Laurentreihen über einem endl. Körper $\mathbb{F}_q$.

Bew: Sei zuerst $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Dann ist auch $\mathrm{char}(K_0) = p$. Sei $\Lambda = \{\zeta_1, .. \zeta_q\}$ mit $K_0 = \mathbb{F}_q$ wie in Lemma 4.47 mit $\zeta_i^q = \zeta_i$. Daher ist Λ ein endl. Teilk. von K.

Sei $\pi \in \mathfrak{m}$ mit $(\pi) = \mathfrak{m}$. Dann ist jedes $a \in K$ eind. darstellbar als $\sum\limits_{j \geq k} x_j \pi^j$ mit $x_j \in \Lambda$, d.h. $K = \Lambda((\pi))$.

Ist $\mathrm{char}(K) = 0$, dann ist $\mathbb{Q} \subseteq K$ und die Bewertung auf $\mathbb{Q}$ nicht-trivial, da K_0 endl. ist. Daher ist $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m} \neq 0$, d.h. $K \supseteq \mathbb{Q}_p$ für ein p. Ist Λ wie eben, und $K_0 = \mathbb{Q}_p(\Lambda)$, dann erfüllt K_0 die Voraus. von Lemma 4.50, d.h. $K = K_0(\pi)$ ist alg/K_0, also K alg. über $\mathbb{Q}_p$.

Ziel:

Satz 4.52 Sei K lok. Körper, E/K endl. Erw. Dann enthält E einen eind. unverzweigten max. Teilkörper $\mathbb{W}$. Es ist $f = [E_0 : K_0] = [\mathbb{W} : K]$ und $\mathbb{W}/K$ ist zyklisch. E ist vollst. verzw. über $\mathbb{W}$ (d.h. $[E_0 : \mathbb{W}_0] = 1$) und $[E : \mathbb{W}] = e = [v(E^*) : v(K^*)]$.

Bew Seien wie vorher V, W mit max. Ideal $\mathfrak{m} \subset V$, $\mathfrak{m}' \subset W$, also $f = [E_0 : K_0] = [W/\mathfrak{m}' : V/\mathfrak{m}]$; e

Dann ist für $\mathbb{F}_q = K_0$ also $E_0 = \mathbb{F}_{q^f}$ und die Gal. gr. $G(E_0/K_0)$ ist zykl. mit Erzeuger

$$\sigma : x \mapsto x^q.$$

Seien Λ_E, Λ_K die Wurzeln von $x^{q^f} = x$ bzw $x^q = x$ in E bzw K. Dann ist $\Lambda_K \subset \Lambda_E$. Setze $L = K(\Lambda_E)$.

<u>Beh:</u> L/K ist unverzweigt und $[L:K] = f$.

<u>Bew:</u> Die Abb. $\zeta \mapsto \bar\zeta = \zeta + \mathfrak{m}'$ ist ein Isom. von $\Lambda_E^* \xrightarrow{\simeq} E_0$. Ist daher ζ eine prim. (q^f-1)-te Einheitswurzel in Ω, dann ist $\bar\zeta$ prim. (q^f-1)-te Einh.wurzel in E_0, $L = K(\zeta)$ und $E_0 = K_0(\bar\zeta)$.

Sei $\bar g_0(x)$ Minpol. von $\bar\zeta / K_0$, also $\deg g_0 = f = [E_0 : K_0]$ und $x^{q^f} - x = \bar g_0(x) \bar h_0(x)$ in $K_0[x]$.

Nach Hensels Lemma ist dann $x^{q^f} - x = g(x) h(x)$ in $V[x]$ mit $\bar g(x) = \bar g_0(x)$, $\bar h(x) = \bar h_0(x)$. Wäre $g(\zeta) \neq 0$, dann ist $h(\zeta) = 0$ und daher $\bar h_0(\bar\zeta) = 0$ $\big\}$ zu $\bar g_0(\bar\zeta) = 0$ und weil $x^{q^f} - x$ versch. Wurzeln hat.

Daher ist $g(\zeta) = 0$ und irred. in $V[x]$, da $\bar g_0(x) \in K_0[x]$ irred.
und daher in $K[x]$

Daher ist $g(\zeta)$ Minpol. von ζ / K, d.h. $[L:K] = \deg g = f$.
Wegen $\Lambda_E \subset L$ ist der Res. grad der Bewertung von L genau f und wegen $[L:K] = f$ ist der Verzw. index 1, d.h. L ist unverzweigt.

Als Zerf.körper von $x^{q^f} - x$ ist L Galois'sch über K.
Sei $G = Gal(L/K)$. Jedes $\sigma \in G$ bestimmt einen

Autom. $\bar\sigma \in Gal(E_0/K_0)$ durch $\bar\sigma: \bar a \mapsto \overline{\sigma(a)}$ für $a \in W$.
Weil ~~ist~~ $L = K(\Lambda_E)$ ist und für $a \in \Lambda_E$ die Abb.
$a \mapsto \bar a$ inj., ist $\sigma \mapsto \bar\sigma$ inj. und wegen
$|G| = [L:K] = [E_0/K_0] = |Gal(E_0/K_0)|$ ist dies ein Isom, d.h. $Gal(L/K)$ ist isom. zu $Gal(\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_q)$ und daher zyklisch. Weil L unverzweigt ist über K, ist $[v(E)^* : v(L^*)] = e = [E:L]$. Daher ist E vollst. verzweigt über L. Ist $\pi \in \mathfrak{m}'$ mit $(\pi) = \mathfrak{m}'$, dann ist nach Lemma $E = L(\pi)$, π alg. über L mit Eisenstein-Polyn. als Minpol.

<u>Bem:</u> Ist E/K unverzw., dann liftet der kanon. Erz $\sigma: x \mapsto x^q$ der Galgr. $G(E_0/K_0)$ zu einem kanon. Erz. $\bar\sigma$ von $Gal(E/K)$ mit $a \in \Lambda_E \mapsto a^q$. Diese Abb. heißt Frobenius autom. von E/K.

Für die Bestimmung der Brauergr. lok. Körper zeigt man, dass jeder lok. komp. tot. unzusamh. Schiefkörper als Zentrum einen lokalen Körper hat, der über einer unverzw. endl. Erw. zerfällt. Daher werden die Klassen der Brauergr. von <u>zykl. Algebren</u> repräsentiert, dies sind verschränkte Produkte mit zykl. Galoisgr.
Man erhält:

<u>Satz:</u> Ist K lok. Körper, dann ist $Br(K) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.