$q(1-pb)=0$, also $pb=1$, d.h. $v(p)=0$ ↯. §

Ist nun $a\in K^*$, dann ist $a\notin (p^{n+1})$ für ein $n\in\mathbb{N}$ min. Daher ist $a=p^n u$, $u\in V\setminus(p)=U$ und diese Darst. ist eindeutig: $p^n u = p^m v \Rightarrow p^{n-m} = vu^{-1}\in U$ also $n=m$, $u=v$. Damit ist $v(a)=n\,v(p)$ und die Bewertung diskret.

<u>Def</u> 5.10 Wir nennen Bewertungen v_1, v_2 auf K äquiv., wenn es einen Ordnungsisom. $\theta: v_1(K^*)\to v_2(K^*)$ gibt mit $v_2(x)=\theta(v_1(x))$.

Es gilt offensichtlich:

<u>Satz</u> 5.11 Für jeden Körper K ex. eine Bij. zwischen Äquiv. kl. von Bewertungen und Bewertungsringen in K. Dabei entsprechen diskr. Bewert. Hauptidealringen.

<u>Satz</u> 5.12 Die einzigen nicht-triv. Bewert. auf $\mathbb{Q}$ sind die p-adischen.

<u>Bew:</u> Nach Satz 5.11 genügt es, die Bew.ringe $V\subseteq\mathbb{Q}$ zu bestimmen. Sei $V\subseteq\mathbb{Q}$ Bew.ring mit max. Ideal $\mathfrak{m}$. Wegen $1\in V$ folgt $\mathbb{Z}\subseteq V$ und $\mathbb{Z}\cap\mathfrak{m}$ ist Primideal in $\mathbb{Z}$. Ist $\mathbb{Z}\cap\mathfrak{m}=0$, dann ist jedes $k\in\mathbb{Z}$ in U, d.h. invertierbar in V. Also ist $V=\mathbb{Q}$ und v die triv. Bew. Sonst ist $\mathbb{Z}\cap\mathfrak{m}=p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p. Dann ist $n\in\mathbb{Z}$ entweder durch p teilbar oder eine Einheit in V, d.h. $v=v_p$.

<u>Satz</u> 5.13 Die einzigen nicht-triv. Bew auf $K(x)$, die auf K trivial sind, sind die p-ad. Bew. für $p\in K[x]$ irred. und die Grad-Bewertung $\deg$.

Bew: Sei $V \subseteq K(X)$ ein Bew.ring, $K \subseteq V$. Ist $X \in V$, dann ist $K[X] \subseteq V$ und derselbe Bew. wie in 5.12 zeigt, dass die Bew. trivial oder p-adisch ist. (Dies benutzt nur, dass $\mathbb{Z}$, $K[X]$ Hauptidealringe sind.)
Ist $X \notin V$, dann ist $Y = X^{-1} \in V$ und man erhält denselben Schluss mit Y anstelle X. Es ist $Y \notin U$, d.h. für
$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X],\ a_n \neq 0, \text{ ist } f = \left(\sum a_i Y^{n-i}\right) Y^{-n},$$
d.h. $v(f) = -n = -\deg f$.

Bem: Ist K alg abg., dann sind die irred. Polyn. von der Form $X - a$, $a \in K$, d.h. die Bewertungen entsprechen den $a \in K \cup \{\infty\}$ mit ∞ für die Gradbew und Res. körper K.

Man kann Bewertungen auch als Absolutbetrag auffassen:

Def 5.14 Ist R ein komm. Ring, dann heißt $|.|: R \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ein Absolutbetrag, falls gilt:

(i) $|x+y| \le |x| + |y|$
(ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$
(iii) $|x| \ge 0$ und $|x| = 0$ gdw $x = 0$.

Bem: (i) Ein Ring mit Abs. betrag ist nullteilerfrei wegen ~~(iii)~~ (iii).
(ii) Jeder nullteilerfreie Ring hat mindestens einen Abs betrag nämlich
$$|x| = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Dann heißt $(R, |.|)$ diskret.

(iii) Ist (K, v) ein reell-bewert. Körper, d.h. $v(K^*) \subseteq \mathbb{R}$, dann erhalten wir einen Abs. betrag auf K durch
$$|x| = 2^{-v(x)}$$
Damit gilt (i) in der stärkeren Form $|x+y| \le \max\{|x|, |y|\}$ mit Gleichheit, falls $|x| \neq |y|$ (Ultrametrik.)

M.a.W: alle Dreiecke sind gleichschenklig,
alle Punkte im Kreis sind Mittelpunkte,
etc.

Ein Abs.betrag, der die ultrametrische Ungleichung erfüllt, heißt nicht-archim., sonst archim.

Bem: Jeder nicht-archim. Abs. betrag induz. eine Bewert. durch $v_{|\cdot|}(x) = -\ln |x|$.

Bsp: Die p-ad. Abs.beträge sind nicht-archim.

Prop 5.15 Sei $|.|$ ein Abs.betrag auf einem Körper K.
Dann sind äquiv:
(i) $|.|$ ist nicht-archim.
(ii) $|n \cdot 1| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$
(iii) $|n \cdot 1|$ ist beschränkt für alle $n \in \mathbb{Z}$
(iv) $|z| \leq 1 \Rightarrow |1+z| \leq 1$.

Für den Beweis benutzen wir
(*) $\lim_{n\to\infty} (1+n\alpha)^{\frac{1}{n}} = 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Bew von (*): Es ist $(1+n\alpha)^{\frac{1}{n}} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $\delta > 0$ ist $(1+\delta)^n \geq 1 + n\alpha$ für genüg. große n nach dem Binomialsatz. Da δ beliebig, folgt (*).

Bew von 5.15 (i)⇒(ii): Ist $|.|$ nicht-archim., dann ist
$|n \cdot 1| \leq \max\{|1|, .. |1|\} = 1$.
(ii) ⇒ (iii) ✓, (iii) ⇒ (iv): Sei $|n \cdot 1| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist für $z \in K$ mit $|z| \leq 1$ also
$$|1+z|^n = |(1+z)^n| = \left|\sum \binom{n}{i} z^i\right| \leq (n+1) M$$
und daher $|1+z| \leq (1+n)^{\frac{1}{n}} M^{\frac{1}{n}}$ und (iv) folgt mit (*).
(iv) ⇒ (i) Sind $x, y \in K$, oBdA $x, y \neq 0$, $|y| \leq |x|$, also $|y/x| \leq 1$. Dann ist nach (iv) $|1 + \frac{y}{x}| \leq 1$, also
$|x+y| \leq |x| = \max\{|x|, |y|\}$.

Kor 5.16 Ist K ein Körper mit archim. Absol. betrag, dann ist $\operatorname{char} K = 0$.

Bew: Folgt aus 4.14 (iii).

Mithilfe des Absolutbetrages wird ein Ring R zu einem metrischen (und damit topol.) Raum durch $d(x,y) = |x-y|$. Add. und Multipl. sind nach Bed (i) und (ii) stetig, d.h. R wird ein topol. Ring.

Def 5.17 Sei R ein Ring mit Absbetrag $|\,|$. Eine Folge $\{a_n\}$ in R heißt Cauchy-Folge, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ex. so dass $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n > N$.

R heißt vollständig bzgl $|\,|$, falls jede Cauchy-Folge konv.

Bsp: $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ vollst. bzgl $|\,|$, $\mathbb{Q}$ nicht.

Genau wie bei der Konstr. von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ in Analysis I können wir jeden Ring mit Abs. betrag in einen vollst. Ring einbetten: Sei $(R, |\,|)$ ein Ring mit Abs. betrag. Sei C die Menge der Cauchyfolgen in R (bzgl. $|\,|$). Dann ist C ein Ring bzgl. pktw. Add. und Multipl. Und mit $(a)_a$, $a \in R$, enthält C den Unterring R als Menge der konst. Folgen.

Setze $\mathfrak{M} = \{(a_n) \in C \mid \lim a_n = 0\}$. Dann ist $\mathfrak{M}$ ein Ideal in C (weil jede Cauchy-Folge beschränkt ist.) Es ist $R \cap \mathfrak{M} = 0$ und daher ist $R \hookrightarrow C \to C/\mathfrak{M} =: \overline{R}$ eine Einbettung. Offensichtlich ist R dicht in $\overline{R}$, denn jedes $a \in \overline{R}$ ist Grenzwert einer Folge in R, bzgl. ~~Wir zu sehen, dass $\overline{R}$ voll~~ des Abs. betrags

$|\cdot| : \bar{R} \to \mathbb{R}$, $(a_n) + \mathfrak{N} \mapsto \lim |a_n|$.

Dieser Abs.-betrag ist wohldef. und erfüllt (i), (ii), (iii). Außerdem setzt es den auf R gegeb. Betrag $|\cdot|$ fort.

Wir behaupten, dass $\bar{R}$ bzgl. dieses Betrags vollst ist. Sei $(\bar{a}_n)$ eine Cauchy-Folge in $\bar{R}$. Dann ex $a_n \in R$ mit $|\bar{a}_n - a_n| < \frac{1}{2^n}$, d.h. (a_n) ist Cauchy-Folge in R im Grenzwert $\lim(a_n) = \lim(\bar{a}_n) = (a_n) \in \bar{R}$. Daher ist $\bar{R}$ vollständig. Die Vervollst. ist eindeutig bis auf Isometrie: Dies folgt wie bei $\mathbb{R}$ aus der Dichtheit von R in der Vervollständigung, denn Isometrien sind stetig.

Ist R ein Körper, dann ist auch $\bar{R}$ Körper: Ist $c = \lim(c_n) \neq 0$, dann ist $\lim(c_m^{-1} - c_n^{-1}) = \lim_{m,n}(c_m^{-1}(c_n - c_m)c_n^{-1})$
$= 0$, da (c_n) beschr.,
d.h. (c_n^{-1}) ist Cauchy-Folge und daher $c^{-1} = (c_n^{-1}) + \mathfrak{N}$.

__Satz 5.18__ Sei R ein kommut. Ring mit Abs.-betrag. Dann ex. ein vollst. Ring $\bar{R}$ mit Abs.-betrag und eine Einbettung $R \to \bar{R}$, die Beträge erhält, deren Bild dicht ist in $\bar{R}$. $\bar{R}$ ist bis auf Isometrie eind. und falls R ein Körper ist, dann auch $\bar{R}$. $\bar{R}$ heißt die Vervollst. von R.

__Bsp 5.18__ (i) Für $\mathbb{Q}$ mit Betrag $|\cdot|_\infty = |\cdot|$ ist $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

(ii) Für $\mathbb{Q}$ mit p-ad. Abs.betrag $|x|_p = 2^{-v_p(x)}$ wird die Vervollst. mit $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet: der Körper der p-ad. Zahlen

Die Elte von $\mathbb{Q}_p$ haben eine Darst. der Form

$$(*) \quad a = \sum_{i=-k}^{\infty} a_i p^i, \quad 0 \leq a_i < p.$$

Denn a ist $|\ |_p$-Grenzwert einer CF-Folge (b_n) in $\mathbb{Q}$, also ist $|b_m - b_n|_p \to 0$, d.h. wir können annehmen, dass $b_m \equiv b_n \bmod p^m$ $(m < n)$ gilt und erhalten $(*)$.

Dabei ist $\mathbb{Z}_p$ die Vervollst. von $\mathbb{Z}$ und besteht aus Summen der Form $(*)$ mit $a_i = 0$ für $i < 0$.

Die Elte aus $\mathbb{Z}$, sind die endl. Summen der Form $(*)$.

<u>Bem</u> 5.20 Ist $|\ |_v$ der Absbetr. einer disk. Bewertung v auf K, dann bleiben die Wertegr. und der Res.körper bei der Vervollst. zu $\bar{K}$ unverändert: Die Bewert. v lässt sich auf $\bar{K}$ fortsetzen und es gilt $v(K) = v(\bar{K})$, $K_v = \bar{K}_v$.

<u>Bew:</u> Es ist $v(K^*)$ eine diskr. Ugr. von $\mathbb{R}$, daher abg. und für $a \in \bar{K}$ ist $v(a) = \lim v(a_n)$ für, ~~(a_n)~~ $\lim a_n = a \in v(K^*)$. Sind V, V' die Bewertungsringe von v auf K bzw $\bar{K}$, dann gilt $V \subseteq V'$, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}'$. Wegen $\mathfrak{m} \subseteq V \cap \mathfrak{m}'$ und $V \cap \mathfrak{m}' \neq V$ gilt wegen der Maxim. von $\mathfrak{m}$ dann $V \cap \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$. Außerdem ist $V + \mathfrak{m}' = V'$, denn jedes $c \in V'$ lässt sich schreiben als $c = c_0 + c_1$ mit $c_0 \in V$ und $c_1 \in \mathfrak{m}$.

Daher ist $V'/\mathfrak{m}' = (V+\mathfrak{m}')/\mathfrak{m}' \simeq V/(V\cap\mathfrak{m}') = V/\mathfrak{m}$. □

Wir nennen zwei Abs. beträge <u>äquiv.</u>, wenn sie dieselbe Topol. induzieren.

<u>Bem</u>: Jeder Abs. betr., der die diskr. Topol. induziert, muss trivial sein, denn ist $|.|$ nicht triv., dann ex ein $a\in K$ mit $|a|\neq 0,1$, d.h. $a\neq 0$ und entweder $|a|<1$ oder $|a^{-1}|<1$, und für x mit $0<|x|<1$ gilt $|x^n|\to 0$

<u>Satz 5.20</u> Seien $|.|_1, |.|_2$ nicht-triv. Abs. beträge auf K. Dann sind äquiv:

(i) $|.|_1$ und $|.|_2$ sind äquiv.

(ii) $|x|_1<1 \Rightarrow |x|_2<1$ für alle $x\in K$

(iii) $|x|_1 = |x|_2^c$ für ein $c\in\mathbb{R}$ und alle $x\in K$.

<u>Bew</u>: (i) ⇒ (ii) Ist $|x|_1<1$, dann ist $x^n\to 0$ in der $|\,|_1$-Metrik, also auch in der $|.|_2$-Metrik, d.h. $|x|_2<1$.

(ii) ⇒ (iii) Zuerst: $|x|_1<1 \Leftrightarrow |x|_2<1$. Bew: Sonst ex $a\in K$ mit $|a|_2<1$, $|a|_1\geq 1$, d.h. für $b=a^{-1}$ also $|b|_1\leq 1$, $|b|_2>1$. Sei $c\in K$ mit $0<|c|_1<1$, also $0<|c|_2<1$. Dann ist $|b^nc|_1<1$ für alle $n\geq 0$, also $|b^nc|_2<1$, d.h. $|b|_2^n<|c^{-1}|_2$ für alle n, d.h. $|b|_2<1$.

Sei nun $f_i(x) = -\log|x|_i$, $i=1,2$, also $f_1(x)>0 \Leftrightarrow f_2(x)>0$ und $f_i(xy)=f_i(x)+f_i(y)$.

Z.z: $f_2(x) = c\, f_1(x)$.

Sei $a\in K^*$ mit $f_1(a)>0$. Dann gilt für alle $x\in K$, $m,n\in\mathbb{N}$

$$f_1(x) > \frac{m}{n} f_1(a) \Leftrightarrow f_1(x^na^{-m})>0 \Leftrightarrow f_2(x^na^{-m})>0 \Leftrightarrow f_2(x)>\frac{m}{n}f_2(a)$$

d.h. für $r\in\mathbb{Q}$ ist $f_1(x)>r f_1(a) \Leftrightarrow f_2(x)>r\cdot f_2(a)$.

Für $r\to f_1(x)/f_1(a)$ folgt $\frac{f_2(x)}{f_2(a)} \geq \frac{f_1(x)}{f_1(a)}$. Aus

→

Symmetriegründen gilt

$$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{f_2(a)}{f_1(x)} =: c \, , \text{ d.h. (iii) gilt.}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wenn (iii) gilt, dann folgt

$$|a_n|_1 \to 0 \Leftrightarrow |a_n|_2 \to 0, \text{ also (i).}$$

Ziel: Fortsetzungen von Bewertungen und Absol. betr. auf Körpererw. untersuchen.

Erinnerung: Ist L/K endl. Körpererw., etwa $[L:K]=n$, dann ist für $a \in L$, $\lambda_a : L \to L$, $x \mapsto a \cdot x$ K-lin. Daher ist $\lambda : L \to GL_n(K)$, $a \mapsto \lambda_a$ wohldef. und es ist $N_{L/K}(a) = \det(\lambda_a)$ die Norm von a (und $T_{L/K}(a) = \text{spur}(\lambda_a)$ die Spur von a).

Es gilt $N_{L/K}(ab) = N_{L/K}(a) \cdot N_{L/K}(b)$.

Ist L/K, $G = Gal(L/K)$, dann ist $N_{L/K}(a) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(a)$.

Satz 5.22 Sei $|\cdot|$ ein Abs. betrag auf K, K vollst. bzgl $|\cdot|$ und L/K endl. Wenn $|\cdot|$ sich auf L zu einem Absbetrag fortsetzen lässt, dann ist diese Fortsetzung eind. und gegeben durch

$$|a| = |N_{L/K}(a)|^{1/[L:K]}.$$

Dann ist L bzgl. der Fortsetzung ebenfalls vollst.