Dann hat $b t^{-1} a^{3} t a^{6} b^{3} t^{-1}$ reduz. Darst.
$b t^{-1} a^{-1} = b^{-5} t^{-1} a^{3}$.

<u>Satz</u> 3.22 Wenn $g \in \pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$ eine reduz. Darst. $\neq 1$ besitzt, dann ist $g \neq 1$. Insbesondere sind die Vertexgr. $G_v \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$, $v \in Y^0$.

<u>Bew:</u> Für $(\mathbb{G}, Y)$ mit einer Kante ist die Satz 2.47. bzw Satz 3.9 (iii). Nun verwende Induktion über die Anzahl der Kanten und die Bsp. in 3.17

<u>Bem</u> 3.23 Diese Argumente benutzen folgende Beobachtung
Sei $(\mathbb{G}, Y)$ ein Gr.gph, und sei $(\mathbb{G}', Y')$ ein Gr.gph, der aus $(\mathbb{G}, Y)$ durch Kontraktion einer Kante e entsteht, wobei die Vertexgr. folgendermaßen ersetzt werden:

Ist 

Ist 

$G'_{v_0*} = \langle G_{v_0}, t \mid \dots \rangle$

Dann ist $\pi_1(\mathbb{G}, Y) \simeq \pi_1(\mathbb{G}, Y')$.
(s. ÜA Blatt 9, Aufg. 1)

Nun der <u>Hauptsatz der Bass-Serre-Theorie</u> in allg. Form.

Schon bewiesen für amalg. Prod. und HNN-Erw.

Def 3.24 Sei $p: X \to Y$ ein Morph. vom Baum X in den zsh. Gph Y, $T \subseteq Y$ ein Spannbaum. Ein Paar $(\tilde{T}, \tilde{Y})$ von Teilbäumen in X heißt <u>Lift des Paares</u> (T, Y), falls $\tilde{T} \subseteq \tilde{Y}$ und

(i) Für jede Kante $e \in \tilde{Y}^1 \setminus \tilde{T}$ sind $\alpha(e)$ <u>oder</u> $\omega(e) \in \tilde{T}$.

(ii) $p|\tilde{T} \to T$ ist ein Isom.

und $p: \tilde{Y}^1 \setminus \tilde{T}^1 \longrightarrow Y^1 \setminus T^1$ ist bij.

Für $v \in Y^0 (= T^0)$ sei $\tilde{v} \in \tilde{T}^0$ mit $p(\tilde{v}) = v$ und für $e \in Y^1$ sei $\tilde{e} \in \tilde{Y}^1$ mit $p(\tilde{e}) = e$.

Nach Satz 3.22 können wir die Vertexgr. G_v aus $(\mathbb{G}, Y)$ in kanon. Weise als Ugr. von $\pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$ betrachten.

<u>Satz</u> 3.25 Sei $G = \pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$ für einen Gr. gph $(\mathbb{G}, Y)$ mit Spannbaum T. Dann ex. ein Baum X, auf dem G ohne Invers. von Kanten operiert, derart dass $G \backslash X \simeq Y$ und so dass Vertex- und Kantenstab. von G auf X konjug. sind zu den kanon. Ugr. G_v, $v \in Y^0$, bzw $\alpha_e(G_e)$, $e \in Y^1$.

Ist $p: X \to Y = G \backslash X$ die zugeh. Proj., dann ex. ein Lift $(\tilde{T}, \tilde{Y})$ des Paares (T, Y), so dass

(i) Für $\tilde{v} \in \tilde{T}^0$ (bzw $\tilde{e} \in \tilde{Y}^1$ mit $\alpha(\tilde{e}) \in \tilde{T}^0$) ist

$$G_{\tilde{v}} = G_v \text{ und } \alpha_{\tilde{e}}(G_{\tilde{e}}) = \alpha_e(G_e).$$

(ii) Für $\tilde{e} \in \tilde{Y}^1$ mit $\omega(\tilde{e}) \notin \tilde{T}^0$, dann ist $t_e^{-1}(\omega(\tilde{e})) \in \tilde{T}^0$.

<u>Bew</u>: Ähnlich wie für amalg. Prod. und HNN-Erw.

Wir def. nur X, $\tilde{T}$, $\tilde{Y}$ und die Wirkung von G auf X.

Wähle eine Orient. auf Y. Für $v \in Y^0$ betr. $G_v \leq G$, und für $e \in Y^1_+$ betr. $G_e = \alpha_e(G_e) \leq G_{\alpha(e)} \leq G$.

Beachte dass $t_e = 1_G$ genau dann wenn $e \in T^1$.

Def. X folgendermaßen

$$X^0 = \bigcup_{v \in Y^0} G/G_v \,, \quad X^1_+ = \bigcup_{e \in Y^1_+} G/G_e$$

$$\alpha(gG_e) = g\,G_{\alpha(e)} \,, \quad \omega(gG_e) = g\,t_e\,G_{\omega(e)} \,, \quad \text{für } g \in G,\, e \in Y^1_+$$

Dann operiert G offens. auf X durch Linksmultipl.
Wir müssen zeigen, das X ein Baum ist, d.h. zsh. ist und keine Schleifen enthält.

Dass X zsh. ist, folgt aus der Existenz reduz. Darst.
Es genügt z.z., dass für $v_0, v_1 \in Y^0$, $g \in G$ die Vertices G_{v_0} und $g\,G_{v_1}$ durch einen Weg verbunden sind.
Schreibe g als reduz. Ausdruck. Dieser beschreibt einen Weg durch den Baum. Daher ist X zsh.

Es gibt (trotz der nicht notw. Eind. der reduz. Ausdrücke) keine Zykel: Ein reduz. Ausdruck $\neq 1$ ist von 1 versch.

Bsp $\quad Y = \begin{tikzcd} u \arrow[r, bend left, "e_1"] \arrow[r, "e_2"'] & v \end{tikzcd} \qquad g = b\,t_{e_2}^{-1}a^{-1} = b^{-5}\,t_{e_2}^{-1}\,a^3$

Dann sind $G_v = \underline{b\,G_v =} \; b^{-5}G_v$ und $g\,G_u = b^{-5}t^{-1}G_u$
durch die Kante $b^{-5}G_{e_2}$ verbunden

Die Valenz von gG_v ist $\sum\limits_{\substack{e\in Y^1\\ \alpha(e)=v}} |G_v : \alpha_e(G_e)|$

Wir erhalten ein Lift $\tilde T$ vom T durch

$$\tilde T^0 = \bigcup_{v\in T^0}\{G_v\}\ , \quad \tilde T^1_+ = \bigcup_{e\in T^1_+}\{G_e\}$$

und $\tilde Y$ ist gegeben durch $\tilde T \cup \{t_e G_{\omega(e)}, G_e \mid e\in Y^1_+\setminus T^1_+\}$

<u>Kor</u> 3.26 Jede endl. Ugr. einer Gr. $\pi_1(\mathcal G, Y, T)$ ist konjug. zu einer Ugr. einer der Vertexgr.

<u>Bew</u>: Dies folgt aus Kor. 2.16 und Satz 3.25

Nun die Umkehrung:

<u>Satz</u> 3.27 Sei G eine Gr., die ohne Inversion von Kanten auf einem Baum X operiert. Dann ex. ein kanon. Isom. $G \cong \pi_1(\mathcal G, Y, T)$, wobei $Y = G\backslash X$, $T\subseteq Y$ ein Spannbaum, $(\tilde T, \tilde Y)$ Lift für (T, Y) und für $y\in Y^0, e\in Y^1$ $G_y = \mathrm{Stab}_G(\tilde y)$, $G_e = \mathrm{Stab}_G(\tilde e)$ mit $p(\tilde y) = y$, $p(\tilde e) = e$, $\tilde y \in \tilde T$, $\tilde e\in \tilde Y$.

Für $e\in Y^1\setminus T^1$ mit $\omega(\tilde e)\notin \tilde T^0$ wähle $t_e \in G$ mit $\omega(\tilde e) = t_e\,\widetilde{\omega(e)}$ (denn $\widetilde{\omega(e)}\in \tilde T^0$) und setze $t_{\bar e} = t_e^{-1}$.

~~Dann~~ Für $e\in Y^1$ def. Einbettung $\omega_e : G_e \to G_{\omega(e)}$ durch $\omega_e(g) = \begin{cases} g & \text{falls } \omega(\tilde e)\in \tilde T^0 \\ t_e^{-1} g t_e & \text{falls } \omega(\tilde e) \in \tilde Y^0\setminus \tilde T^0 .\end{cases}$

<u>Bew</u>: ~~Über reduzierte Ausdrücke~~. Für HNN-Erw. und amalg. Produkte über Normalformen.

Wir zeigen $G' := \langle \mathrm{Stab}_G(v), t_e \mid v \in Y^0, e \rangle = G$.

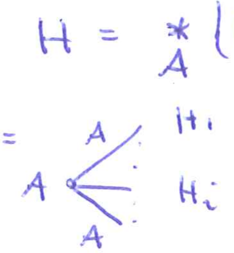
Ist $G' < G$, dann sind die Gph. $G' \cdot \tilde{T}$ und $G \setminus G' \cdot \tilde{T}$ disj. Ist $g' \in G'$, $g \in G \setminus G'$, dann ist niemals $g v_0 = g' v_1$ für $v_0 \neq v_1 \in Y^0$.

Ist $g v = g' v$ für ein $v \in Y^0$, dann ist ~~D~~, $g \in g' \mathrm{Stab}_G(v) \subseteq G'$. Weil $X = G \cdot \tilde{T}$ zsh. ist, kann man X nicht als Verein. disj. Teilgph schreiben. Daher ist $G' = G$.

Nun können wir jedes Elt $g \in G \setminus \{1\}$ als reduz. Ausdruck darstellen und induktiv über die Länge zeigen, dass $g = g_1 \cdots g_n$, $n \geq 1$, dann operiert g nicht-trivial, d.h. $g \neq 1$. Insbes. sind die Einbettungen $\mathrm{Stab}_G(v) \to G_v$, $v \in Y^0$, $t_e \mapsto t_e$, $e \in Y^1 \setminus T^1$ inj.

Bem: Sei $(\mathbb{G}, Y)$ ein Gr.gph, X ein Baum, wie in Satz 3.25. Dann oper. jede Ugr $H \leq G = \pi_1(\mathbb{G}, Y)$ auf X und daher ist nach Satz 3.26 selber Fundamentalgr. eines Gr.gph. Im Allg. ist die Bez. zwischen diesen Gr.gph. kompliziert. Wir beweisen nur den Satz von Kurosh:

Satz 3.27 Sei $H = \ast_A \{H_i \mid i \in I\}$, d.h. $H = \pi_1(\mathbb{G}, Y)$

mit $(\mathbb{G}, Y) =$  . Sei $G \leq H$ mit $G \cap x A x^{-1} = \{1\}$ für alle $x \in H$.

Dann ex. ex. eine freie Gr. F und ein Rep.system X_i für die Doppelnebenklassen $G \backslash H / H_i$ so, dass

$$G = F \ast \mathop{\ast}_{\substack{i \in I \\ x \in X_i}} (x H_i x^{-1} \cap G)$$

Bew: Sei X der Baum mit Fundamentalgr. H wie in Satz 3.26. Dann ist $X^0 = H/A \cup \left(\bigcup_{i\in I} H/H_i\right)$ und

$X^1_+ = \bigcup_{i\in I} ((H/A)\times\{i\})$ mit $\alpha(hA,i) = hA$, $\omega(hA,i) = hH_i$.

Die Gr. G oper. auf X durch Linksmultipl.

Sei $Y = G\backslash X$ der Quotient, $p: X \to Y$ die kanon. Proj., $T \subseteq Y$ ein Spannbaum und $(\tilde T, \tilde Y)$ ein Lift für (T, Y) in X. Die Vertexmenge von $\tilde T^0$ besteht aus einer max. Menge der Form xA, xH_i, $i\in I$, die pw. nicht G-äquiv. sind. Daher ex. ~~ein~~ Repräs.systeme X_A, X_i für $G\backslash H/A$ bzw $G\backslash H/H_i$ so dass

$$\tilde T^0 = \{xA \mid x \in X_A\} \cup \bigcup_{i\in I} \{xH_i \mid x \in X_i\}.$$

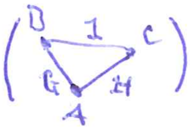
Für $xA \in \tilde X^0$ ist $\mathrm{Stab}_G(xA) = G \cap xAx^{-1} = \{1\}$

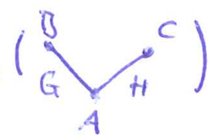
für $xH_i \in \tilde X^0$ ist $\mathrm{Stab}_G(xH_i) = G \cap xH_ix^{-1}$

Für $xA \in X^1$ ist $\mathrm{Stab}_G(xA) = \{1\}$.

Daher ist nach Satz 3.27 G ein freies Prod. der Vertexgr. und der Gruppe F mit Basis

$\{t_e \in G : \tilde e \in Y^1$ mit $\omega(\tilde e) \notin \tilde T^0$ und $t_e^{-1}(\omega(\tilde e)) \in \tilde T^0\}$

Bem: Der Bew. benutzt, dass $\pi_1\Big($ 

$\Big) \cong \pi_1\Big($ 

$\Big)$.

Kor 3.28 Ist $G = A * B$, $g, h \in G$ mit $[g,h] = 1$, dann sind g, h im selben Konjug. von A oder B oder es ex ein $x \in G$ mit $g, h \in \langle x\rangle$ (also $\langle g, h\rangle$ zyklisch).

Bew: Sei $H = \langle g, h \rangle \leq G$. Dann ist H abelsch und nach Kurosh von der Form $H = F * A' * B'$. Da echte freie Produkte niemals abelsch sind ist entweder $H = F \simeq \mathbb{Z}$ $= \langle x \rangle$ oder $\langle g, h \rangle \leq A^g$ oder $\leq B^z$.

Zum Abschluss der Vorlesung betrachten wir noch Anwendungen von HNN-Erw. zur Konstr. von Gr. und residuelle Endlichkeit der freien Gr.

§ 4 Vermischtes

Satz 4.1 Jede abz. Gr. C kann in eine Gr. G eingeb. werden, die 2 Erz. hat und so dass gilt:

(i) G hat p-Torsion gdw C p-Torsion hat

(ii) Ist C endl. präs., dann auch G.

Bew: Sei $C = \langle c_1, c_2, \dots \mid s_1, \dots \rangle$ mit abz. Erz.menge. Setze $F = C * \langle a, b \rangle$. Dann erzeugen

$A_0 = \{a, a^b, a^{b^2}, \dots\}$ und $B_0 = \{b, c_1 b^a, \dots, c_n b^{a^n}, \dots\}$

freie Gr. A bzw B, denn nicht-triv. Worte über A_0 bzw B_0 sind $\neq 1$ in F.

Daher ist $G = \langle F, t \mid a^t = b, (a^{b^i})^t = c_i b^{a^i}, i \geq 1 \}$ eine HNN-Erw von F und damit $C \leq G$.

Es ist $G = \langle t, a \rangle$ und G hat genau dann ein Elt der Ord. n, wenn C ein solches Elt hat.

Ist $C = \langle c_1, \dots c_m \mid s_1, \dots s_k \rangle$ endl. präs., dann auch G, weil es nur endl. viele HNN-Rel. gibt.

<u>Satz</u> 4.2 (B. Neumann) Es gibt $2^{\aleph_0}$ - viele nicht-isom. Gr. mit 2 Erz.

<u>Bew</u>: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen und für $S \subseteq \mathbb{P}$ sei $T_S = \bigoplus_{p \in S} C_p$, $G_S \geq T_S$ eine Gr. mit 2 Erz. Dann haben T_S und G_S genau dann ein Elt der Ord. p, wenn $p \in S$, d.h. für $S \neq S' \subseteq \mathbb{P}$ ist

$$G_S \not\cong G_{S'}.$$

<u>Satz</u> 4.3 (HNN) Jede abz. Gr. lässt sich in eine abz. Gr. einbetten, in der je zwei Elt derselben Ord.

<u>Bew</u>: <u>Beh</u> 1: Ist C abz., dann ex. eine Gr C^*, in der alle Elte von C derselben Ord. konjug. sind.

<u>Bew</u> der Beh 1: Sei $\{(a_i, b_i) : i \in I\}$ Menge aller geord. Paare in C mit $\langle a_i \rangle \cong \langle b_i \rangle$. Dann ist

$$C^* = \langle C, t_i \mid i \in I, a_i^{t} = b_i \rangle$$ wie behauptet.

Für den Bew des Satzes bilden wir eine Kette induktiv: Setze $G_0 = C$, und sei G_i bereits def. Dann setze

$$G_{i+1} = G_i^*$$ wie in der Beh. Dann hat

$$C_\infty^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$$ die gewünschte Eigenschaft.

<u>Satz</u> 4.4 Jede abz. Gr. C kann in eine abz. einf. divis. Gr. eingebettet werden. (Divisibel: $\forall x \; \forall n \in \mathbb{N}$ ~~[illegible]~~ $\exists y$ mit $y^n = x$)

<u>Bew</u>: Setze $K = C \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C_n \oplus \mathbb{Z}$ und bette $K * \langle x \rangle$ in eine Gr. $U = \langle a, b \rangle$ ein mit $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}$ nach Satz 4.1.

Nach Satz 4.3 lässt sich U in eine abz. Gr. G einbetten, in der alle Elte der gleichen Ord. konjug. sind. Ist $1 \neq N \trianglelefteq G$, $z' \in N \setminus \{1\}$ dann ex $z \in K$ mit $\langle z \rangle \cong \langle z' \rangle$. Weil z, z' konj. sind, ist dann $z \in K \cap N$. Daher ist $[x, z] \in N$ ein Elt unendl. Ordnung in N (nach Bem 2.40 (iv)) und daher konjug. zu a, b. Also sind $a, b \in N$, d.h. $N \geq U$. Weil U Elte bel. Ord. enthält und alle Elte derselben Ord. in G konjug. sind, folgt $N = G$.

Ist nun $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$, $m = |\langle g \rangle|$, dann hat G ein Elt z der Ord. $n \cdot m$. Es ist $|z^n| = m$, d.h. $g = v^{-1} z^n v$ für ein $v \in G$, also $g = (z^v)^n$ und G ist divis.

<u>Kor</u> 4.5 Es gibt $2^{\aleph_0}$ viele nicht-isom. abz. einf. Gr.

<u>Bew</u>: Es gibt $2^{\aleph_0}$ viele 2-Erz. Gr., jede abz. Gr. enthält höchstens abz. viele 2-Erz. Ugr.

<u>Satz 4.6</u> Sei $G = \langle X \mid R \rangle$ ein rekurs. präs. einf. Gr. Dann ist das Wortproblem für G entscheidbar. M.a.W. es gibt einen Algorithmus, der für ein Wort w über $X^{\pm}$ entscheidet, ob $w = 1_G$.