Setze $g(x_0) = \begin{cases} (g x_0) & \text{falls } g \in A \\ (\widetilde{g x_0}, \overline{g x_0}) & g \notin A. \end{cases}$

Ebenso erhalten wir H-Wirkung auf W_B und setzen die H-Wirkung auf W_A fort durch

$$h \cdot \tau = \varphi_*^{-1}(h \cdot \varphi_*(\tau)), \quad \tau \in W_A, \; h \in H.$$

Damit erhalten wir eine Wirkung von $G * H$ auf W_A. Weil jedes Elt $\varphi(a)\, a^{-1}$ ~~trivial~~ operiert, erhalten wir Wirkung von $F = G *_A H$ auf W_A.

Sei $f \in F$, $f = x_0 \ldots x_n$ in A-Normalform. Dann ist mit $f_i = x_0 \ldots x_i$

$$\begin{aligned} f \cdot (1) &= f_{n-1} \cdot (1, x_n) \\ &= f_{n-2}(1, x_{n-1}, x_n) = \ldots = f_0(1, x_1, \ldots x_n) \\ &= (x_0, \ldots x_n), \end{aligned}$$

d.h. die A-Normalform ist eind.

<u>Kor</u> 2.48 Sei $F = G *_{A=B} H$. Dann induz. die kanon. Proj. $i: G * H \to F$ Einbettungen von $G, H \hookrightarrow F$ und $\langle i(G), i(H) \rangle = F$ mit $i(G) \cap i(H) = i(A) = i(B)$.

<u>Kor</u> 2.49 Ist F Gr., $G, H \leq F$, $A = G \cap H$ und jedes $g \in F$ hat eind. A-NF, dann $F \cong G *_A H$

§ 3 <u>Bäume und amalgamierte Produkte</u>

<u>Bem</u> 3.1 Sei $\Gamma(G, S)$ der Cayleygph von $G = \langle S \rangle$. Dann ist $\Gamma(G, S)$ genau dann ein Baum, wenn $G = F(S)$. (<u>Bew</u>: Ein zsh. Gph ist Baum gdw alle red. Wege eind.)

<u>Kor</u> 3.2 Eine freie Gr. operiert frei und ohne Invers von Kanten auf einem Baum.

Auch die Umkehrung gilt

Satz 3.3 Ist G eine Gr., die frei und ohne Invers. von Kanten auf einem Baum X oper., dann ist G frei und $\mathrm{rk}\, G = |\tilde{X}^1_+ \setminus \tilde{T}|$, wobei $\tilde{X} = G\backslash X$ und $\tilde{T}$ Spannbaum in $\tilde{X}$ ist.

Bew Sei $T \subseteq X$ ein Lift von $\tilde{T}$. Dann liegen versch. Vertices von T in versch. G-Bahnen und jede G-Bahn ist in T repräsent. Wähle Orientierung auf X, die zu einer Orient. auf $\tilde{X}$ geliftet wird.
Sei $\tilde{E} = \tilde{X}^1_+ \setminus \tilde{T}$. Dann ex. für jede Kante $\tilde{e} \in \tilde{E}$ ein Lift $e \in X^1$ mit $\alpha(e) \in T$ und dieses e ist eind., denn G_{α} operiert trans. auf den Kanten e' mit $p(e') = \tilde{e}$. Ein Elt. $g \in G$ mit $g(e) = e'$ fixiert $\alpha(e)$ ↯. Offens. ist $e \notin T$.
Sei $E = \{e \mid e \in X^1_+ \mid \alpha(e) \in T, \omega(e) \notin T\}$.
Dann induz p eine Bij. $p: E \to E'$.
Für $e \in E$ ex. ein eind. Vertex $v(e) \in T$ mit $v(e) \in G\,\omega(e)$ und sei $g_e \in G$ mit $g_e\, v(e) = \omega(e)$
Dadurch ist g_e eind. bestimmt.

Beh: $G = F(S)$ für $S = \{g_e \mid e \in E\}$.
Für $g \in G$ sind die gT pw. disj. Teilbäume von X und $X^0 = \bigcup_{g \in G} gT^0$. Sei $f \in X^1_+ \setminus \bigcup gT^1$. Dann verbindet f zwei Bäume, etwa g_1T und g_2T.
Wir erhalten einen neuen Baum X_T, in dem jeder Baum

gT zu einem Vertex (gT) kontrahiert ist und in dem f die Vertices (g_1T), (g_2T) verbindet.

Nach Vorbem. genügt es z.z. $X_T \cong \Gamma(G, S)$. Wir def. den Isom. $(gT) \longmapsto g$ auf Vertices und für Kanten $f \mapsto (g_1, s)$ mit $s = g_1^{-1} g_2$ und f verbindet (g_1T) und (g_2T).

Dann ist $s \in S$, weil $g_1^{-1} f$ die Teilb. T und $g_1^{-1} g_2 T$ verbindet.

Die Beh. über den Rang ist klar, weil für Bäume X gilt $|X^0| = |X^1| + 1$.

<u>Kor</u> (Nielsen - Schreier) Jede Ugr. einer freien Gr. ist frei.

Nun zeigen wir entspr. Ergebnisse für amalg. Prod.

<u>Ein Segment</u> in einem Graph besteht aus einer Kante, deren Inversen und den zugeh. Knt.

~~<u>Satz 3.4</u>~~

<u>Bem</u>: Ist X ein Graph, G eine Gr., die darauf operiert, dann ist $G \backslash X$ genau dann ein Segment, wenn G ohne Inversion von Kanten oper. und es eine 2-Färbung von X gibt, so dass G trans. auf den Vertices jeder Farbe oper.

<u>Satz 3.4</u> Sei $G = G_1 *_A G_2$. Dann ex. ein Baum X so dass G ohne Invers. von Kanten auf X operiert und $G \backslash X$ ein Segment ist. Dieses Segment hat einen Lift zu einem Segment $(e, \alpha(e), \omega(e))$, so dass $G_e = A$, $G_{\alpha(e)} = G_1$, $G_{\omega(e)} = G_2$.

Bew: Setze $X^0 = G/G_1 \cup G/G_2$, $X^1_+ = G/A$, und $\alpha(gA) = gG_1$, $\omega(gA) = gG_2$, $\tilde{T} = (G_1, G_2, A)$. Dann oper. G auf X durch Linksmultipl. und offens. gilt $G_{G_1} = G_1$, $G_{G_2} = G_2$, $G_A = A$.

Beh: X ist zsh.

Offens. genügt z.z. $\forall g \in G$ ist gG_1 mit G_1 durch einen Weg verbunden. Sei $g = g_1 \cdots g_n$, $g_i \in G_1 \Leftrightarrow i \equiv 1 \bmod 2$

Dann ist ~~induktiv~~ $g_1 \cdots g_i G_1 = g_1 \cdots g_{i-1} G_1$ gdw $g_i \in G_1$ und falls $g_1 \cdots g_i G_1 \neq g_1 \cdots g_{i-1} G_1$, dann sind die Vertices durch die Kanten mit dem Vertex $g_1 \cdots g_{i-1} G_2 = g_1 \cdots g_i G_2$ verbunden

Beh: X enthält keine Zykel.

Dies folgt aus der Eindeutigkeit der A-Normalform.

Bem: Offensichtlich hat ein Vertex gG_1 genau $|G_1 : A|$-viele Nachbarn in X^0

Es ist $G_{gG_1} = G_1^{g^{-1}}$ etc.

Die Umkehrung von Satz 3.4

Satz 3.5 Sei G eine Gr., die auf einem Baum X oper. so dass $G \backslash X$ ein Segment ist. Ist $\tilde{T} \subseteq X$ ein Lift dieses Segments, $\tilde{T} = (P, Q, e)$, dann ist

$$G \simeq G_P *_{G_e} G_Q .$$

Bew: Offens. können wir X^0 identifiz. mit $G/G_P \cup G/G_Q$ und X^1_+ mit G/G_e. Weil $G_P \in X^0$ und $gG_P \in X^0$ durch einen Weg in X verbunden sind, folgt wie im Bew.

von Satz 3.4, dass $G = \langle G_P, G_Q \rangle$. Weil der Weg
eindeutig ist, folgt aus Kor. 2.49 $G \cong G_P *_{G_e} G_Q$.

Beim amalg. Produkt wird eine Ugr. beider Faktoren schon in der Konstr. identifiz. Bei HNN-Erweiter. identifiziert man nachträglich:

<u>Def</u> 3.6 Sei G eine Gr., $A, B \leq G$, $\varphi: A \to B$ ein Isom., $\langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$. Die <u>HNN-Erweiterung</u> von G bzgl. A, B, φ ist die Gr. $G^* = \langle G * \langle t \rangle \mid a^t = \varphi(a),\ a \in A \rangle$

$$= \langle G, t \mid t^{-1} a t = \varphi(a),\ a \in A \rangle .$$

HNN = Higman, Bernhard Neumann, Hanna Neumann

t heißt stabiler Buchstabe, A, B die assoz. Ugr.

G Basisgr.

Sei $i: G * \langle t \rangle \to G^*$ die kan. Proj.

Dann lässt sich jedes $x \in G^*$ schreiben als

$$x = i(g_0)\, i(t)^{\varepsilon_1} i(g_1) \dots i(t)^{\varepsilon_n} i(g_n) = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n$$

mit $g_i \in G$, $\varepsilon_j = \pm 1$.

Seien T_A, T_B Transversale für ${}_A\backslash G$ bzw $B \backslash G$ mit $1 \in T_A, T_B$. Für $g \in G$ sei $\tilde{g}, \hat{g}$ mit $Ag = A\tilde{g}$, $Bg = B\hat{g}$.

<u>Def</u>. 3.7 Eine Normalform für G^* (bzgl T_A, T_B) ist eine Folge $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \dots t^{\varepsilon_n}, g_n)$ so dass

(i) $g_0 \in G$

(ii) Es ist $\varepsilon_i = -1$, dann ist $g_i \in T_A$, sonst $g_i \in T_B$.

(iii) Es gibt keine Teilfolge $t^{\varepsilon}, 1, t^{-\varepsilon}$.

Wegen $t^{-1}a = \varphi(a)t^{-1}$, $tb = \varphi^{-1}(b)t$, $a \in A$, $b \in B$ lässt sich jedes $g \in G$ in Normalform $g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n$ schreiben

Bsp 3.8. Sei $G = F(a,b)$, $G^* = \langle G, t \mid t^{-1}a^2t = b^3 \rangle$
$$= \langle a, b, t \mid t^{-1}a^2t = b^3 \rangle$$

$A = \langle a^2 \rangle$, $B = \langle b^3 \rangle$, $\varphi : a^2 \mapsto b^3$.

Sei $J_A = \{ w \in G \mid w = a^j b^{i_1} a^{i_2} \dots,\ j = 0,1,\ i_k \neq 0 \}$
$J_B = \{ w \in G \mid w = b^j a^{i_1} b^{i_2} \dots,\ j = 0,1,2,\ i_k \neq 0 \}$

Dann ist

$$x = b^2 t^{-1} a^{-4} t\, b^5 a b t^{-1} a^4 b^3 a \qquad A a^4 b^3 a = A b^3 a,\ t^{\varepsilon}$$
$$= b^2 t^{-1} a^{-4} t\, b^5 a b^7 t^{-1} b^3 a \qquad t^{-1}a^4 = b^6 t^{-1}$$
$$= b^2 t^{-1} a^{-2} t\, b^2 a b^7 t^{-1} b^3 a \qquad B b^5 a b^7 = B b^2 a b^7$$
$$\qquad tb^3 = a^2 t$$
$$= b a b^7 t^{-1} b^3 a \qquad t^{-1} a^{-2} t = b^{-3}$$

Satz 3.9 Sei $G^* = \langle G, t \mid t^{-1}at = \varphi(a), a \in A \rangle$ eine HNN-Erw. mit Ugr A, B, $\varphi : A \to B$. Dann gilt

(i) Jedes $x \in G^*$ hat eine eind. Darst.
$$x = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n \quad \text{in Normalform}$$

(ii) $G \hookrightarrow G^*$, $g \mapsto g$ ist inj und ~~falls~~ falls $w = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n \neq 1$, $n \geq 1$, und kein Teilwort der Form $t^{-1} g_i t$, $t g_i t^{-1}$ mit $g_i \in A$ oder $g_i \in B$ ex.

Bew: (i) Die Existenz und Eind. sind ähnlich wie in Bew von 2.47 über amalg. Prod. Existenz folgt wie im Bsp. Für die Eind. def. wir Gruppenwirkung von G^* auf der Menge W der Normalformen.

Sei $\tau = (g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \dots t^{\varepsilon_n}, g_n) \in W$.

Wir def. die Wirkung von G, t, t^{-1} auf τ:

$$g \cdot \tau = (g g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1 \dots g_n)$$

$$t \cdot \tau = \begin{cases} (\varphi^{-1}(g_0) g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \dots g_n) & \text{falls } \varepsilon_1 = -1, g_0 \in B \\ (\varphi^{-1}(b), t, \hat{g}_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \dots g_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $b \in B$ durch $g_0 = b \hat{g}_0$ bestimmt ist

$$t^{-1} \tau = \begin{cases} (\varphi(g_0) g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \dots t^{\varepsilon_n}, g_n) & \text{falls } \varepsilon_1 = 1, g_0 \in A \\ (\varphi(a), t^{-1}, \bar{g}_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \dots g_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $g_0 = a \bar{g}_0$.

Damit oper. $G * \langle t \rangle$ auf W. Weil $t^{-1} a t \varphi(a)^{-1}$, $a \in A$ auf W trivial operiert, erhält man eine Wirkung von G^* auf W und wie in 2.47 folgt jetzt die Eindeutigkeit der Normalform.