Sei $\tau = (g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \dots t^{\varepsilon_n}, g_n) \in W$.

Wir def. die Wirkung von G, t, t^{-1} auf τ:

$$g \cdot \tau = (g g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1 \dots g_n)$$

$$t \cdot \tau = \begin{cases} (\varphi^{-1}(g_0) g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \dots g_n) & \text{falls } \varepsilon_1 = -1, g_0 \in B \\ (\varphi^{-1}(b), t, \hat{g}_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \dots g_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $b \in B$ durch $g_0 = b\hat{g}_0$ bestimmt ist

$$t^{-1} \tau = \begin{cases} (\varphi(g_0) g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \dots t^{\varepsilon_n}, g_n) & \text{falls } \varepsilon_1 = 1, g_0 \in A \\ (\varphi(a), t^{-1}, \bar{g}_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \dots g_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $g_0 = a\bar{g}_0$.

Damit oper. $G * \langle t \rangle$ auf W. Weil $t^{-1} a t \varphi(a)^{-1}, a \in A$ auf W trivial operiert, erhält man eine Wirkung von G^* auf W und wie in 2.47 folgt jetzt die Eindeutigkeit der Normalform.

Für den Bew. von (ii) übersetzen wir w in Normalform. Dann hat w mindestens $2n+1$ Terme; wegen (i) ist also $w \neq 1$.

<u>Kor</u> 3.10 Sei $G^* = \langle G, t \mid t^{-1} a t = \varphi(a), a \in A \rangle$ für $A, B \leq G$, $\varphi: A \to B$ Isom. Dann induz. die kanon. Proj. $i: G * \langle t \rangle \longrightarrow G^*$ einen Isom. auf G und $\langle t \rangle$ und nach Identifik. sind A und B unter t konj. $\xrightarrow{54b)}$

<u>Kor</u>. 3.11 Ist G eine Gr. mit Ugr. $H, t \in G$ mit $\langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$, eind. NF $\Rightarrow G \cong G^*$

Übersetzung in Gphen: Ein Loop (= Schleife) ist ein Gph, der aus einem Vertex x und Kanten $e \neq \bar{e}$ besteht

<u>Bem</u>: Ist G ein Gr., die auf einem Gph X operiert, dann ist $G \backslash X$ eine Schleife genau dann, wenn

<u>Prop</u> 3.12 Seien $H, K \leq G$, $\varphi : H \to K$ Isom. Dann lässt sich die HNN-Erw $G^* = \langle G, t \mid H^t = \varphi(H)\rangle$ als Ugr. eines amalg. Prod. beschreiben

<u>Bew:</u> Seien $\langle u\rangle \simeq \langle v\rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Setze $X = G * \langle u\rangle$, $Y = G * \langle v\rangle$ und
$L = \langle G, H^u\rangle \leq X$, $M = \langle G, H^v\rangle \leq Y$.

Dann ist $L = G * H^u$, $M = G * H^v$,
denn es ist $g_1 h_1^u g_2 \cdots h_n^u \neq 1$, falls $g_i, h_i \neq 1$.

Def. Isom. $\tilde{\varphi} : L \to M$, $\tilde{\varphi}(g) = g$ für $g \in M$
$\tilde{\varphi}(h^u) = (\varphi(h))^v$ für $h \in H$.

Sei $\tilde{G}$ das amalg. Produkt $\tilde{G} = X *_{L=M} Y$.

Dann ist $\tilde{\varphi}(x) = x$ für $x \in L$, $G \leq \tilde{G}$
und für $h \in H$ ist $h^u = \tilde{\varphi}(h^u) = \varphi(h)^v$, d.h. $\varphi(h) = h^{uv^{-1}}$

Mit $t = uv^{-1}$ ist dann

$$G^* = \langle G, t \mid t^{-1} h t = \varphi(h) : h \in H\rangle \leq \tilde{G}$$

HNN-Erw. sind nützlich für Einbettungssätze, zur Konstr. von (Gegen-)beispielen etc.
Dazu später mehr.

G trans. auf den Vertices und gerichteten Kanten ohne Invers. von Kanten operiert.

Satz 3.13: Sei $G = \langle H, t \mid t^{-1} a t = \varphi(a), a \in A \rangle$ eine HNN-Erw. von H mit assoz. Ugr. $A, \varphi(A)$. Dann ex. ein Baum X, auf dem G ohne Invers. von Kanten oper., derart dass $G \backslash X$ eine Schleife ist. Es gibt ein Segment $\tilde{Y} \subseteq X$, derart dass die Vertex- und Kantenstab. genau H, H^t und A sind.

Bew: Setze $X^0 = G/H$, $X^1_+ = G/A$, mit $\alpha(gA) = gH$, $\omega(gA) = gtH$. Setze $\tilde{Y} = (A, H, tH) \subseteq X$. Dann oper. G auf X durch Linksmult., X ist ein Baum und die Stab. sind wie behauptet.

Satz 3.14 Sei G eine Gr., die ohne Invers. von Kanten auf einem Baum X oper., derart dass $Y = G \backslash X$ eine Schleife ist. Sei $\tilde{Y}$ ein bel. Lift (= Segment) von Y, $\tilde{Y} = (e, P, Q)$, sei $g \in G$ mit $Q = gP$. Setze $G_e' = g^{-1} G_e g$ und

$\varphi: G_e \to G_e'$, $x \mapsto g^{-1} x g$. Dann ist $G_e' \leq G_P$ und

der kanon. Homom. $\langle G_P, t \mid t^{-1} a t = \varphi(a); a \in G_e \rangle \to G$ ist ein Isom.

Bew: Wie der Bew. von Satz 3.5 mit Hilfe von Kor. 3.11.

Jetzt können wir Gr. beschreiben, die auf Bäumen operieren und Gruppengraphen def.

Def 3.15 Ein Graph von Gr. (oder Gruppengph) besteht aus einem zsh. Gph Y, Vertexgruppen G_v für $v \in Y^0$; Kantengr. G_e für $e \in Y^1$ und Monom. $\{\alpha_e : G_e \to G_{\alpha(e)} \mid e \in Y^1\}$ mit $G_e = G_{\bar{e}}$ $(\mathbb{G}, Y)$

Wir schreiben auch $w_e : G_e \to G_{w(e)}$ für $w_e = \alpha_{\bar e}$.

Sei $F(\mathbb{G}, Y) = \langle G_v, t_e, v \in Y^0, e \in Y^1 \mid t_e t_{\bar e}, t_e^{-1} \alpha_e(g) t_e \alpha_{\bar e}(g)^{-1}, e \in Y^1, g \in G_e \rangle$

__Def__: 3.15 (i) Sei $(\mathbb{G}, Y)$ ein Gr. gph., $P \in Y^0$.

Dann sei $\pi_1(\mathbb{G}, Y, P)$, die Fundamentalgr. von $(\mathbb{G}, Y)$ bzgl. P, def. als

$$\pi_1(\mathbb{G}, Y, P) = \{ g_0 t_{e_1} g_1 t_{e_2} \cdots t_{e_n} g_n \mid g_0 \in G_P,\ g_i \in G_{w(e_i)},\ 1 \le i \le n,\ e_1 \dots e_n \text{ geschl. Weg in } P \}.$$

(ii) Sei $T \subseteq Y$ ein Spannbaum.

Dann sei $\pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$, die Fundamentalgr. von $(\mathbb{G}, Y)$ bzgl T def. durch $\langle F(\mathbb{G}, Y) \mid t_e, e \in T^1 \rangle$.

Ziel: $\pi_1(\mathbb{G}, Y, P) \simeq \pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$.

__Bsp__: 3.16 (i) Ist $G_v = \{1\}$ für alle $v \in Y^0$, dann ist

$$\pi_1(\mathbb{G}, Y, P) \simeq \pi_1(Y, P)$$

(ii) Ist $Y = P \xrightarrow{e} Q$, dann ist $\pi_1(\mathbb{G}, Y, Y) \simeq G_P \ast_{G_e} G_Q$

mit $G_e \xhookrightarrow{\alpha_e} G_P$, $G_e \xhookrightarrow{\alpha_{\bar e}} G_Q$.

(iii) Ist $Y = {}^{P}\!\circlearrowright e$, dann ist $\pi_1(\mathbb{G}, Y, P) \simeq \langle G_P, t \mid t^{-1} \alpha_e(g) t = \alpha_w(g) \rangle$

(iv) Ist $(\mathbb{G}, Y)$ ein bel. Gr. gph, dann ~~kann man~~ erhält man $\pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$ aus $\pi_1(\mathbb{G}, T, T)$ durch iterierte HNN-Erweiterungen. Man erhält

$\pi_1(\mathbb{G},T,T)$ (falls $|T^0|\geq 2$) aus der Fundamentgr. eines Segmentes durch iterierte amalg. Prod.

<u>Satz 3.17</u> Sei $(\mathbb{G},Y)$ ein Gr. gph, $P\in Y^0$, $T\subseteq Y$ ein Spannbaum. Dann induz. der kanon. Epim. $p: F(\mathbb{G},Y)\to\pi_1(\mathbb{G},Y,T)$ einen Isom. $\pi_1(\mathbb{G},Y,P)\longrightarrow\pi_1(\mathbb{G},Y,T)$.

<u>Bew:</u> Für jedes $v\in Y^0\setminus\{P\}$ ex. ein eind. reduz. Weg $e_1\ldots e_k$ in T von P zu v. Sei $\gamma_v = t_{e_1}t_{e_2}\cdots t_{e_k}\in F(\mathbb{G},Y)$ und setze $\gamma_P=1$.

Def $q': \pi_1(\mathbb{G},Y,T)\longrightarrow\pi_1(\mathbb{G},Y,P)$ durch

$$g\longmapsto \gamma_v\, g\,\gamma_v^{-1} \quad \text{für } g\in G_v,\ v\in Y^0$$
$$t_e\longmapsto \gamma_{\alpha(e)}\,t_e\,\gamma_{\omega(e)}^{-1} \quad \text{für } e\in Y^1.$$

Dann lässt sich q' zuerst zu einem Homom. auf $F(\mathbb{G},Y)$ fortsetzen wegen $t_e t_{\bar e}\in\ker(q)$:

$$t_e t_{\bar e}\longmapsto \gamma_{\alpha(e)}\,t_e\,\gamma_{\omega(e)}^{-1}\,\gamma_{\alpha(\bar e)}\,t_{\bar e}\,\gamma_{\omega(\bar e)}^{-1} = 1$$

und $\quad t_e^{-1}\alpha_e(g)\,t_e\cdot(\alpha_{\bar e}(g))^{-1}\in\ker(q)$

Für $e\in T^1$ ist auch $t_e\in\ker(q)$.

Daher erhalten wir Epim. $q: \pi_1(\mathbb{G},Y,T)\longrightarrow\pi_1(\mathbb{G},Y,P)$.

Es ist $p\circ q=id$, $q\circ p = id$.

<u>Kor 3.18</u> Ist $(\mathbb{G},Y)$ ein Gr. gph, $P\in Y^0$, $T\subseteq Y$ ein Spannb. dann ist $\pi_1(\mathbb{G},Y,P)\simeq\pi_1(\mathbb{G},Y,T)=:\pi_1(\mathbb{G},Y)$.

Def 3.20 Sei (G, Y) ein Gr.gph mit Spannbaum $T \subseteq Y$.
Die Elemente $g \in G_v$, $g' \in G_u$, $u, v \in Y^0$, heißen <u>äquiv.</u> (bzgl T) wenn $g' = \omega_{e_k} \alpha_{e_k}^{-1} \cdots \omega_{e_1} \alpha_{e_1}^{-1}(g)$ wobei $e_1 \dots e_k$ ein Weg in T von v nach u ist (der Länge ≥ 0)

Ist Y_+^1 eine Orientierung für Y. Dann lässt sich jedes $x \in \pi_1(G, Y, T)$ schreiben als $x = g_1 \cdots g_n$ mit $g_i \in G_{v_i}$ oder $g_i = t_e^{\pm 1}$ für $e \in Y_+^1 \setminus T$.
Ein solcher Ausdruck heißt <u>reduziert</u>, falls

(i) g_i, g_{i+1} sind nicht äquiv. zu Elten derselben Vertexgr. (Insbes. liegen g_i, g_{i+1} nicht in derselben Vertexgr.)

(ii) es ex. kein Teilwort der Form $t_e t_e^{-1}$ oder $t_e^{-1} t_e$

(iii) es ex kein Teilwort der Form $t_e^{-1} g t_e$ oder $t_e h t_e^{-1}$, wobei g (bzw h) aus Vertexgr äquiv. zu einem Elt aus $\alpha_e(G_e)$ (bzw $\omega_e(G_e)$) ist.

<u>Bem:</u> Wenn $g_1 \cdots g_n$ nicht reduziert ist, lässt sich der Ausdruck mithilfe der Relationen in (G, Y, T) verkürzen. Daher hat jedes Elt eine reduz. Darstellung. Diese ist aber nicht notw eind:

<u>Bsp 3.21</u> Sei
$$Y = \begin{tikzcd} u \arrow[r, bend left, "e_1"] \arrow[r, bend right, "e_2"'] & v \end{tikzcd}. \quad G_u = \langle a \mid a^{12} = 1 \rangle,$$
$$G_v = \langle b \mid b^{18} = 1 \rangle, \quad G_{e_1} = \langle c \mid c^2 = 1 \rangle, \quad G_{e_2} = \langle d \mid d^3 = 1 \rangle$$
$$c \mapsto a^6, b^9 \qquad d \mapsto a^4, b^6$$
Sei
$$T = \begin{tikzcd} u \arrow[r, "e_1"] & v \end{tikzcd}$$
Dann ist
$$\pi_1(G, Y, T) = \langle a, b, t \mid a^{12} = b^{18} = 1,\ a^6 = b^9,\ t_{e_2}^{-1} a^4 t_{e_2} = b^6 \rangle$$