Bew: Sei ein Zykel p_e, $e \in \tilde{X}^1_+ \setminus T$ Basiszykel. Dann lässt sich jeder Zykelprodukt H als Prod. von Basiszykeln schreiben, denn sind $e_1, \dots, e_r \in \tilde{X}(\dots)$ Kanten, die einen Zykel in H bilden, dann ist das Wort ein Elt in H und jedes Elt aus H lässt sich so darstellen.

Kor 2.34 Ist $G = \langle S \rangle$ endl. erz., $|S| = d$, $H \leq G$ mit $[G:H] = m$, dann kann H von $m(d-1)+1$ Elt erz. werden.

Bew: Der Graph $\tilde{X} = {}_H\backslash\Gamma(G,S)$ hat m Ecken, $d \cdot m$ pos. Kanten. Ein Spannbaum für $\tilde{X}$ hat m Ecken, $m-1$ Kanten, also ist $|\tilde{X}^1_+ \setminus T^1| = dm - (m-1)$
(gilt auch für endl. präsent.)
$= (d-1)m + 1$.

Satz von Schreier:

Kor 2.35 Ist $F = F(S)$, $H \leq F$, dann ist auch H freie Gr.

Bew: Der Beweis von Satz 2.26 zeigt, dass H die freie Gr. über p_e, $e \in \tilde{X}^1_+ \setminus T$ ist.

Bsp

Satz 2.36 Ist F frei über $X = \{x_\alpha \mid \alpha < \beta\}$, $\beta \geq 3$, dann ist $F' = [F,F]$ frei von unendl. Rang.

Bew: Wie im Beweis von Satz 2.21 sieht man, dass $F(X)/_{[F(X),F(X)]} \cong \mathbb{Z}^X$. Daher kann jedes Elt von $F(X)$ eind. geschrieben werden in der Form $c\, x_{\alpha_1}^{l_1} \cdots x_{\alpha_k}^{l_k}$ mit $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, $c \in F'$, $l_i \neq 0$.

Dann bildet die Menge $\{x_{\alpha_1}^{l_1} \cdots x_{\alpha_k}^{l_k} \mid \alpha_i < \alpha_{i+1},\ k \in \mathbb{N},\ l_i \neq 0\}$

eine Schreier-Transversale für F/F'.

Die Kante $(F' x_{\alpha_2}^{l}, F' x_{\alpha_2}^{l} x_{\alpha_1})$ mit $\alpha_1 < \alpha_2$ liegt nicht im zugeh. Spannbaum und die Basiszykel

$x_{\alpha_2}^{l} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2}^{-l} x_{\alpha_1}^{-1}$ für $\alpha_1 < \alpha_2$ bilden Erz. für F'!

Da $l \neq 0$ bel., folgt die Beh (denn $F' x_{\alpha_2}^{l} x_{\alpha_1} = F' x_{\alpha_1} x_{\alpha_2}^{l}$).

<u>Kor</u> 3.27 Jede freie Gr. von $Rg \geq 2$ enthält Ugr von jedem Rg $k \leq \aleph_0$.

<u>Def</u> 3.28 Sind A, B Gruppen, dann ist das <u>freie Prod.</u> $A * B$ folgendermaßen def: Dabei nehmen wir an $A \cap B = \{1\}$. Eine Normalform für $A * B$ ist ein Ausdruck der Form

$g_1 \cdots g_n$, $n \geq 0$, $g_i \in (A \cup B) \setminus \{1\}$ und $g_i \in A$ oder $g_{i+1} \in B$.

Dann heißt n die Länge der Normalform, $n = 0$ bez. $1 \in A * B$. Auf den Normalformen def. wir eine Multipl. über die Summe der Längen: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

Sind nun $x = g_1 \cdots g_n$, $y = h_1 \cdots h_m$, $n, m \geq 1$, setze

$$x \cdot y = \begin{cases} g_1 \cdots g_n h_1 \cdots h_m & \text{falls } g_n \in A, h_1 \in B \text{ oder } g_n \in B, h_1 \in A \\ g_1 \cdots g_{n-1} z h_2 \cdots h_m & \text{falls } g_n, h_1 \in A \text{ oder } g_n, h_1 \in B \text{ und } z = g_n h_1 \neq 1 \\ g_1 \cdots g_{n-1} h_2 \cdots h_m & \text{falls } g_n = h_1^{-1} \end{cases}$$

Man überlegt leicht, dass $A * B$ mit dieser Multipl. eine Gr. ist.

Es gibt Einbett. $A \hookrightarrow A * B$, $B \hookrightarrow A * B$.

Prop 2.39 Sind $A, B \leq G$ so, dass jedes $g \in G$ eind. als ein Produkt $g = g_1 \cdots g_n$ geschrieben werden kann $\Big]$ mit $g_i \in (A \cup B) \setminus \{1\}$, $g_i \in A \iff g_{i+1} \in B$, dann ist $G \cong A * B$.

Bew: Klar.

Bem 2.40 (i) Es ist $F(a,b) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ und allgemeiner $F_n \cong F_{n-1} * \mathbb{Z}$, wobei F_n die freie Gr. vom Rg n bezeichnet.

(ii) Ist $g = g_1 \cdots g_{2n}$ in Normalform, $n \geq 1$, dann hat g unendl. Ord.
Insbesondere ist jedes Elt endl. Ordn. in $A * B$ konjugiert zu einem Elt von A oder B und ein freies Prod. tors. fr. Gr. ist tors. fr.

(iii) In $G = A * B$ ex. die Menge $X = \{a^{-1}b^{-1}ab \mid a \in A \setminus \{1\}, b \in B \setminus \{1\}\}$ eine Ugr, die frei über X ist.

(iv) Ist $G = A * B$, $A \neq \{1\} \neq B$, $g = ab \in G$, $a, b \neq 1$, dann ist $C_G(g) = \langle g \rangle$ unendl. zykl.
Insbes. ist $Z(G) = \{1\}$.

Prop 2.41 (P. M. Neumann) Keine Gr. lässt sich gleichzeitig als nicht-triv. freies Prod. und als nicht-triv. dir. Produkt darstellen.

Bew: Ist $G = A * B$, $A, B \neq \{1\}$, $g = ab \in G \setminus (A \cup B)$, $a \in A, b \in B$, dann ist $C_G(g) = \langle g \rangle \cong C_\infty$.

Ist $G \cong D \times E$, $D, E \neq \{1\}$, $g = de$, $d \in D$, $e \in E$, dann ist $C_G(g) = C_D(d) \times C_E(e) \not\cong C_\infty$ ↯

Bem Prop. 2.39 sagt: Sind $A, B \leq G$, so dass für jede Normalform $g = a_1 b_1 a_2 \dots a_k$ gilt $g \neq 1$, dann ist $G \cong A * B$.

Lemma 2.42 (Ping-Pong-Lemma)

Sei G eine Gr., die auf einer Menge X operiert, $G_1, G_2 \leq G$, $H = \langle G_1, G_2 \rangle$, $|G_2| \geq 3$, $|G_1| \geq 2$.
Seien $X_1, X_2 \subseteq X$ nicht leer, $X_2 \not\subseteq X_1$ und

$$g(X_2) \subseteq X_1 \quad \text{für alle } g \in G_1 \setminus \{1\}$$
$$g(X_1) \subseteq X_2 \quad\quad g \in G_2 \setminus \{1\}.$$

Dann ist $H \cong G_1 * G_2$.

Bew: Sei $w = a_1 b_1 \dots a_k$ ein reduz. Wort über $G_1 \setminus \{1\} \cup G_2 \setminus \{1\}$. z.z. $w \neq 1_G$. Es ist

$$w(X_2) = a_1 \dots a_k(X_2) \subseteq a_1 b_1 \dots b_{k-1}(X_1) \subseteq \dots \subseteq a_1(X_2) \subseteq X_1,$$

also wegen $X_2 \subseteq X_1$ ist $w \neq 1_G$.

Ist $w = a_1 b_1 \dots a_k b_k$, wähle $a \in G_1 \setminus \{1, a_1\}$ und betrachte $a^{-1} w a$.

Bsp 2.43 $G \cong PSL_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$.

Bew mit Ping-Pong-Lemma (nach R. Alperin)

Setze $A = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

Dann ist $\langle A, B \rangle = SL_2(\mathbb{Z})$ (ÜA)

Sei $\psi: SL_2(\mathbb{Z}) \to PSL_2(\mathbb{Z})$ die Proj.

Setze $\alpha = \psi(A)$, $\beta = \psi(B)$.

Dann ist $\alpha^2 = \beta^3 = 1 \in PSL_2(\mathbb{Z})$,

denn $A^2 = B^3 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \in \ker\psi$ und $\langle \alpha, \beta \rangle = PSL_2(\mathbb{Z})$

Beh: $PSL_2(\mathbb{Z}) \simeq \langle \alpha \rangle * \langle \beta \rangle$, $\beta = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} / \mathbb{Z}_2$

Dazu betrachte Wirkung von $PSL_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{C}$,

nämlich für $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

def $X : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ eine Wirkung auf $\mathbb{C}$,

die durch $PSL_2(\mathbb{Z})$ faktor. (d.h. $\ker\psi$ oper. triv.)

Ebenso oper. $SL_2(\mathbb{Z})$ und $PSL_2(\mathbb{Z})$ auf der reellen Gerade. Setze $X_1 = \mathbb{R}_{>} \setminus \mathbb{Q}$, $X_2 = \mathbb{R}_{<0} \setminus \mathbb{Q}$.

Dann ist $\alpha : z \longmapsto -\frac{1}{z}$, $\beta : z \longmapsto \frac{z-1}{z} = 1 - \frac{1}{z}$

$\beta^2 : z \longmapsto 1 + \frac{1}{z-1}$.

Damit ist $\alpha(X_1) \subseteq X_2$, $\beta^{\pm}(X_2) \subseteq X_1$.

Mit dem Ping-Pong-Lemma folgt die Beh.

<u>Bem:</u> Ganz entsprechend wird das freie Prod. einer bel. Familie von Mengen def. Das freie Prod. ist das <u>Koprodukt</u> in der Kategorie der Gruppen.

<u>Def</u> 2.43 Sind G, H Gr., $A \leq G$, $B \leq H$, $\varphi : A \to B$ ein Isom., dann ist das amalg. freie Produkt

$$G *_{A=B} H, \ \langle G * H \mid a = \varphi(a), a \in A \rangle, \ G \underset{A}{*} H$$

Kategorielle Def.:

G mit Einbettungen $G_i \hookrightarrow G$, ist das freie Produkt der G_i, $i \in J$, falls für jede Gr. H und Homom. $\varphi_i : G_i \to H$ ein eind. Homom. $\varphi : G \to H$ ex. mit

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & G \arrow[dl, dashed] \\ H & \end{tikzcd}$$

von G und H über A

<u>Def</u> 2.45 Eine A-Normalform in $G *_A H$ ist eine Folge $(x_0, \dots, x_n)$ mit

(i) $x_0 \in A$

(ii) $x_i \in T_A \setminus \{1\} \cup T_B \setminus \{1\}$, wobei T_A, T_B Repräs. für ${}_A\backslash G$ bzw ${}_B\backslash H$ sind, und $x_i \in T_A \setminus \{1\} \Leftrightarrow x_{i+1} \in T_B \setminus \{1\}$.

Entsprechend ist eine B-Normalform def.

<u>Bsp</u> 2.46 Sei $G = \langle a \mid a^{12} = 1 \rangle$, $H = \langle b \mid b^{15} = 1 \rangle$, $A \leq G$, $B \leq H$ die (eind.) Ugr der Ord. 3, $\varphi : A \to B$, $a^4 \mapsto b^5$.

Dann ist $G *_A H = \langle a, b \mid a^{12} = b^{15} = 1, a^4 = b^5 \rangle$.

Sei $T_A = \{1, a, a^2, a^3\}$, $T_B = \{1, b, b^2, b^3, b^4\}$.

Dann ist $f = a^3 b a^5 = a^3 b a^4 \cdot a = a^3 b^6 a = a^3 b^5 \cdot b a$

$$= a^3 a^4 b a = a^4 a^3 b a$$

<u>Satz</u> 2.47 Jedes Elt $f \in F = G *_A H$ kann eind. in A-Normalform $f = x_0 \cdots x_n$ geschr. werden.

<u>Bew</u>: Die Existenz folgt wie im Bsp.

Für die Eind. sei W_A die Menge aller A-Normalform. W_B Menge aller B-Normalf., $\varphi_* : W_A \to W_B$,
$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (\varphi(x_0), \dots, x_n)$

Defin. Linkswirkung von G auf W_A definiert durch:

Für $g \in G$, $\tau = (x_0, \dots, x_n) \in W_A$, $n \geq 1$, setze

$$g \cdot \tau = \begin{cases} (g x_0, x_1, \dots, x_n) & \text{falls } g \in A \\ (\widetilde{g x_0}, \overline{g x_0}, x_1, \dots, x_n) & g \notin A,\ x_1 \in H \\ (g x_0 x_1, x_2, \dots, x_n) & g \notin A,\ x_1 \in G,\ g x_0 x_1 \in A \\ (\widetilde{g x_0 x_1}, \overline{g x_0 x_1}, x_2, \dots, x_n) & g \notin A,\ x_1 \in G,\ g x_0 x_1 \notin A \end{cases}$$

wobei für $x \in G$, $x = \tilde{x} \bar{x}$ mit $\tilde{x} \in A$, $\bar{x} \in T_A$.