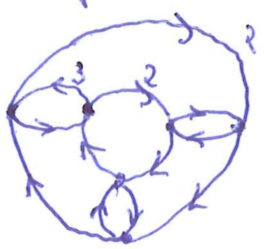
· Ein Baum T mit $p(T) = T'$ heißt Lift von T'.

Def 2.9 Sei G eine Gr., $S \subseteq G$ eine Teilmenge. Sei $\Gamma(G,S)$ der orientierte Gph mit Vertexmenge G, Menge der pos. orient. Kanten $G \times S$ und $\alpha((g,s)) = g$, $\omega((g,s)) = gs$ für $(g,s) \in G \times S$. Es ist $\overline{(g,s)} = (gs, s^{-1})$, (wobei s^{-1} ein 'Label' ist, kein Elt. von G, so dass $(gs, s^{-1}) \notin G \times S$.)

Offensichtlich operiert G auf $\Gamma(G,S)$ durch Linksmult.
Ein Vertex g' geht auf gg',
eine Kante (g',t) auf (gg',t).
Diese Wirkung ist frei und ohne Inversion von Kanten.
Ist $\langle S \rangle = G$, dann heißt $\Gamma(G,S)$ Cayley-Gph von G bzgl S.

Bsp. 2.10 C_n, C_∞ sind Cayley-Gphen von $\mathbb{Z}/n$ bzw $\mathbb{Z}$ bzgl $S = \langle 1 \rangle$.



Dies ist der Cayleygph
$\Gamma(\mathbb{Z}/6, \{2,3\}) \simeq \Gamma(S_3, \{(12),(123)\})$

Automorphismen von Bäumen

Sei X ein Baum. Ein reduzierter Weg in X heißt Geodätische in X. Für disj. Teilbäume $X_1, X_2 \subseteq X$

Lemma 2.11 ex. eine eind. Geodät. mit Anfangspunkt in X_1, Endpunkt in X_2 und alle Kanten außerhalb $X_1 \cup X_2$.

(Bew: Sind $x_1, y_1 \in X_1$, $x_2, y_2 \in X_2$, ~~dann sind~~ die Wege von x_1 zu x_2 und y_1 zu y_2 beide wie in der Beh.

dann folgt $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, da X_1, X_2 tsh. sind.)

Für $u, v \in X^0$ sei $[u,v]$ die Geod. von u nach v und $l(u,v)$ die Länge von $[u,v]$.

Für $\tau \in Aut(X)$ sei v^τ das Bild von v unter τ, $v \in X^0 \cup X^1$.

Offensichtlich ist $l(u,v) = l(u^\tau, v^\tau)$

Setze $|\tau| = \min_{v \in X^0} l(v, v^\tau)$ und

falls $|\tau| = 0$, setze $\mathring{\tau} = \{x \in X^0 \cup X^1 \mid x^\tau = x\}$

falls $|\tau| > 0$, setze $\vec{\tau}$ = min Teilbaum von X, der alle $x \in X^0$ enthält mit $l(x, x^\tau) = |\tau|$.

Dann gilt

<u>Satz</u> 2.12 Sei X ein Baum, $\tau \in Aut(X)$. Dann gilt

(i) Ist $|\tau| = 0$, dann ist $\mathring{\tau}$ ein Baum. Ist $P \in X^0$ und $Q \in \mathring{\tau}$ mit $l(P,Q)$ min., dann ist $l(P,Q) = l(Q, P^\tau)$ und die Verknüpfung von $[P,Q]$ und $[Q, P^\tau]$ ist die Geodät. $[P, P^\tau]$.

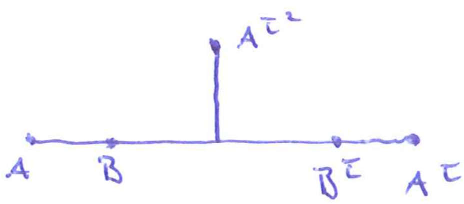
ii) Ist $|\tau| > 0$ und τ ohne Inversion, dann ist $\vec{\tau} \simeq \mathcal{C}_\infty$ und τ operiert auf $\vec{\tau}$ als Translation um $|\tau|$. Ist $P \in X^0$ und $Q \in \vec{\tau}$ mit $l(Q,P)$ min., dann ist $[P, P^\tau] \cap \vec{\tau} = [Q, Q^\tau]$ und $l(P, P^\tau) = |\tau| + 2\, l(P,Q)$

<u>Bew:</u> (i) $\mathring{\tau}$ ist Baum, denn für $P, Q \in \mathring{\tau}$ ist auch $[P,Q] \subset \mathring{\tau}$

Der Rest ist klar wegen $l(P,Q) = l(P^\tau, Q^\tau) = l(P^\tau, Q)$.

(ii) Sei $A \in X^0$ mit $l(A, A^\tau) = |\tau|$. Dann ist die letzte Kante von $[A, A^\tau]$ nicht das Inverse der ersten Kante von $[A^\tau, A^{\tau^2}]$:

Denn für $|\tau| = 1$ würde τ die Kante $[A, A^\tau]$ invertieren, für $|\tau| > 1$ und



$B \in [A, A^\tau]$

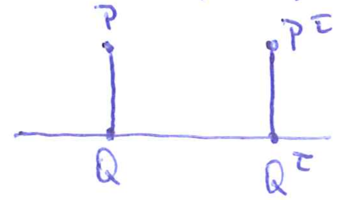
mit $l(A,B) = 1$ folgt $l(B, B^\tau) = l(A, A^\tau) - 2 < |\tau|$ ↯

Daher ist der unendl. Weg $T = \dots A^{\tau^{-1}} A \, A^\tau - A \cong \mathcal{L}_\infty$ der aus den geod. $[A^{\tau^i}, A^{\tau^{i+1}}]$ besteht.

Offensichtlich operiert τ auf T als Translat. um $|\tau|$.

Ist $P \in X^0 \setminus T$ und $Q \in T$ mit $l(P,Q)$ min., dann ist $l(P, P^\tau) = l(P,Q) + l(Q, Q^\tau) + l(Q^\tau, P^\tau) = |\tau| + 2\,l(P,Q) > |\tau|$,

d.h. $\vec{\tau} = T$.



<u>Def</u> 2.13 Ist X ein Baum, $\tau \in \mathrm{Aut}(X)$ ohne Inversion, und $|\tau| = 0$, dann heißt τ Rotation und $|\tau| > 0$, τ Translation mit Achse $\vec{\tau}$.

<u>Lemma</u> 2.14 Sei X ein Baum, $T_1, \dots, T_n \subseteq X$ Teilbäume mit $T_i \cap T_j \neq \emptyset$. Dann ist $\bigcap T_i \neq \emptyset$.

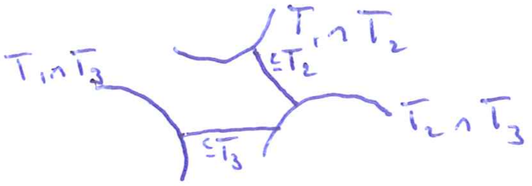
<u>Bew:</u> Durch Induktion über n. Ind.anf. $n = 3$: T_1, T_2, T_3

Setze $T_i' = T_j \cap T_k$, $i \neq j,k$. z.z. $T_i' \cap T_j' \neq \emptyset$, $i,j = 1,2,3$

Ang. $T_i' \cap T_j' = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann ex. eind. geod. L_{ij} nach Lemma 2.11, die T_i', T_j', $\cancel{T_k'}$ verbinden. Es ist $L_{ij} \subseteq T_k$, denn T_k ist Baum, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

Dann ist $L_{12} \subseteq T_3$ und $L_{13} = L_{23}$ verbindet T_1', T_3',

aber wegen der Eindeutigkeit der Geodät. auch T_2', T_3'.
Daher ist $L_{13} \subseteq T_2 \cap T_1 = T_3'$ $\lightning$



Sei die Beh. nun für $n-1$ bew. und seien $T_1, .. T_n$ gegeben mit $T_i \cap T_j \neq \emptyset$.
Dann betrachte $T_1 \cap \bigcap_{i=2}^{n-1} T_i \cap T_n$. Nach Indvoraus. ist $\bigcap_{i=1}^{n-1} T_i$, $\bigcap_{i=2}^{n} T_i \neq \emptyset$. Wende den Fall $n=3$ an auf $T_1, \bigcap_{i=2}^{n-1} T_i, T_n$.

<u>Prop 2.15</u>: Seien $\tau_1, .. \tau_n$ Autom. eines Baumes X. Falls τ_i, $\tau_j \tau_i$ Rotationen sind für alle $i,j = 1, .. n$, dann ist $\bigcap_{i=1}^{n} \mathring{\tau}_i \neq \emptyset$.

<u>Bew:</u> Nach Lemma 2.14 genügt es z.z.: $\mathring{\tau}_i \cap \mathring{\tau}_j \neq \emptyset$.
Angenommen $\mathring{\tau}_i \cap \mathring{\tau}_j = \emptyset$ für $i,j \in \{1, .. n\}$ und sei $[P,Q]$ die Geodät. Verbindung mit $P \in \mathring{\tau}_i$, $Q \in \mathring{\tau}_j$. Dann ist $(P^{\tau_i})^{\tau_j} = P^{\tau_j}$, also $[P, (P)^{\tau_i})^{\tau_j}] = [P, P^{\tau_j}]$ und nach Satz 2.12 liegt der Mittelpunkt Q in $\mathring{\overline{\tau_j \tau_i}} \cap \mathring{\tau}_j$, d.h. $Q = Q^{\tau_j} = (Q^{\tau_i})^{\tau_j}$. Daher ist $Q = Q^{\tau_i}$ und $Q \in \mathring{\tau}_i \cap \mathring{\tau}_j$ $\lightning$

<u>Kor. 2.16</u> Ist $G \leq Aut(X)$ eine endl. Gr. von Autom. eines Baumes X, dann ex ein $P \in X^0$, das von jedem $g \in G$ fix. wird.

<u>Bew:</u> Weil G endl. ist und eine Translation unendl. Ordnung hat, besteht G aus Rotationen. Daher folgt die Beh. aus Prop. 2.15.

Freie Gruppen

Def. 2.17 Sei F eine Gr., $X \subseteq F$ eine (lin. geordn.) Teilm. mit $X \cap X^{-1} = \emptyset$, wobei $X^{-1} = \{x^{-1} \in F \mid x^{-1} \in X\}$. Dann heißt F freie Gruppe mit Basis X, wenn jedes $f \in F \setminus \{1\}$ sich eind. schreiben lässt als $f = x_1 x_2 \dots x_n$ mit $x_i \in X \cup X^{-1}$ und $x_i x_{i+1} \neq 1$ für alle i.
Ein solches Produkt heißt reduziert bzgl X.
(oder: red. Wort)
Per Def. bezeichnet das leere Wort das 1-Elt von F.

Bem: Insbes. ist $F = \langle X \rangle$.
Offensichtlich ist $(\mathbb{Z}, +)$ freie Gr. mit Basis 1.

Satz 2.18 Für jede Menge X ex. eine freie Gr. mit Basis X, $F(X)$.

Bew: Sei X eine Menge, $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$ eine Menge von neuen Symbolen, $X \cap X^{-1} = \emptyset$ und setze $(x^{-1})^{-1} = x$.
Wir nennen $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ Alphabet, Elte von X Buchstaben.
Ein Wort über X ist eine endl. Folge $x_1 \dots x_n$, $n \geq 0$, $x_i \in X^{\pm}$. Für $n = 0$ heißt die Folge das leere Wort.
Für ein Wort $f = x_1 \dots x_n$ heißt $n = |f|$ die Länge von f.
Ein Teilwort von f ist von der Form $x_i \dots x_{i+k}$.
Sei W = Menge aller Wörter über X. Für $f, g \in W$, sei $f \cdot g = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$. $f = x_1 \dots x_n$, $g = y_1 \dots y_m$
Damit W mit diesem Produkt zu einer Gr. wird, def. Äquiv. rel. auf W: $f \sim g$, falls es eine endl. Folge von Wörtern $f = f_1, f_2, \dots f_k = g$ gibt, so dass jedes f_{i+1} aus f_i durch Einfügen oder Streichen eines Teilwortes $x x^{-1}$, $x \in X^{\pm}$, entsteht.

Sei $[F]$ die Menge aller Äquiv. kl. von Worten in W. Ein Wort heißt <u>reduziert</u>, wenn es kein Teilwort der Form xx^{-1} enthält, $x \in X^{\pm}$.

<u>Prop</u> 2.19. Jede Äquiv. kl. $[f]$ enthält ein eind. reduz. Wort.

<u>Bew</u>: Offens. enthält $[f]$ (mind.) ein reduz. Wort. Z.z. ist die Eindeutigkeit. Seien $u, v \in [f]$ reduz. Wörter, $u \neq v$. Wähle eine Folge

$$u = f_1, f_2, \ldots f_k = v \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{k} |f_i| \ \text{min.}$$

Weil u, v reduz., $u \neq v$, gilt $|f_1| < |f_2|$, $|f_{k-1}| > |f_k|$.

Daher ex. $i \in \{2, \ldots k-1\}$ mit $|f_{i-1}| < |f_i| > |f_{i+1}|$.

Dann entsteht f_{i+1} aus f_{i-1} in zwei Schritten: erst xx^{-1} einfügen, dann yy^{-1} streichen. Wenn diese Teilwörter xx^{-1}, yy^{-1} in f_i disjunkt sind, kann man die Reihenfolge umtauschen: erst yy^{-1} streichen, dann xx^{-1} einfügen. Dann erhält man Folge mit $|f_i'| < |f_i|$. $\lightning$ Wenn xx^{-1}, yy^{-1} in f_i nicht disj. sind, dann ist $f_{i-1} = f_{i+1}$ $\lightning$ Min. $\Sigma |f_i|$

Damit können wir den Beweis von 2.18 beenden:

Wir def. auf $[F]$ eine Multipl. durch $[f][g] = [fg]$.

<u>Beh</u>: Damit ist $[F]$ eine freie Gr. mit Basis $[X] = \{[x] \mid x \in X\}$.

Offens. ist das Produkt assoz., $[\emptyset] = 1_{[F]}$ und das Inverse zu $[f] = [x_1 \ldots x_n]$, $x_i \in X^{\pm}$, ist $[x_n^{-1} \ldots x_1^{-1}]$.

Außerdem ist $[f] = [x_1] \ldots [x_n]$ und dieser Ausdruck ist bzgl $[X]$ reduziert gdw das Wort $x_1 \ldots x_n$ reduz. ist. Die Eindeutigkeit der Darstellung in reduz. Form folgt aus Prop. 2.19. Offens. ist $|[X]| = |X|$.

Wir können eine Äquivkl. $[f] \in [F]$ mit dem eind. reduz. Wort $f' \in [f]$ identifiz. Für $x \in X^\pm$ ist offens. $x \in [x]$ reduz. Daher folgt die Beh.

<u>Satz 2.20</u>: Sei F eine Gr., $X \subseteq F$ eine Teilm. Dann ist F frei mit Basis X gdw für jede Gr. G und jede Abb. $\varphi : X \to G$ eine <u>eind.</u> Forts.homom. $\varphi^* : F \to G$ ex., d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & F \arrow[d, "\varphi^*"] \\ & G \end{tikzcd}$$

<u>Bew</u>: Sei $F = F(X)$ und sei $\varphi : X \to G$ eine Abb. Dann lässt sich φ offens. auf $F(X)$ als Homom. fortsetzen durch $\varphi(x_1 \ldots x_n) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)$, $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$, $x \in X$, $x_1, \ldots x_n \in X^\pm$.

Diese Forts. ist offens. eind.

Sei nun umgekehrt F eine Gr., $X \subseteq F$ eine Teilm., so dass für jede Gr. G und Abb. $\varphi : X \to G$ ein eind. Homom. $\varphi^* : F \to G$ ex. Wähle $G = F(X)$ und $\varphi : X \to F(X)$, $x \mapsto x$. Dann ex ein eind. Homom. $\varphi^* : F \to F(X)$, d.h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "id"'] & F \arrow[d, shift left, "\varphi^*"] \\ & F(X) \arrow[u, shift left, "\psi^*"] \end{tikzcd}$$

Andererseits ex. nach "$\Rightarrow$" auch $\psi^* : F(X) \to F$ mit $\psi^*|_X = id_X$.

Wegen der Eindeutigkeit von φ^* ist dann

$$\varphi^* \circ \psi^* \circ \varphi^* = \varphi^*, \text{ also } \psi^* = \varphi^{*-1} \text{ ein Isom.}$$

Satz 2.21 Ist $F = F(X) \simeq F(Y)$, dann ist $|X| = |Y|$, der

Bez: Rang von F, $\mathrm{rk}(F)$.

Bew: Sei $F(X)^2 = \langle w^2 \mid w \in F(X) \rangle$. Offens. ist $F(X)^2 \trianglelefteq F(X)$

und $F(X)/F(X)^2 \simeq \mathbb{F}_2^X = (f : X \to \mathbb{F}_2, +)$ mit

via $\varphi : x_1 \ldots x_n \longmapsto \sum f_{x_i}$ Basis $f_x, x \in X$, $f_x(y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann ist φ surj und $\ker \varphi = F(X)^2$.

(denn $xuxv = (xu)^2 \cdot u^{-1}v$, $x^{-1}uxv = x^{-2}(xu)^2 u^{-1}v$.)

Wegen $|\mathbb{F}_2^X| = 2^{|X|}$ folgt die Beh.

Kor 2.22 Ist $\psi : F(Y) \to F(X)$ ein Epim., dann ist $|Y| \geq |X|$.

Bew: Sei $\psi' : F(Y) \to 2^X$ die Hintereinanderausf. von ψ und φ. Dann ist $F(Y)^2 \leq \ker \psi'$, ψ' surj.

d.h. $|Y| \geq |X|$

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \twoheadrightarrow & F(X) \\ \downarrow & & \downarrow\!\!\downarrow \\ 2^Y & \twoheadrightarrow & 2^X \end{array}$$

Satz 2.23 Jede Gr. G ist Quotient einer freien Gr.

Bew: Sei $X \subseteq G$ mit $\langle X \rangle = G$. Dann ist der eind. Homom. $\varphi : F(X) \to G$ surj., also $G \simeq F(X)/\ker \varphi$.

Def 2.24 Für eine Gr. G sei $\mathrm{rk}(G) = \min |X|$ mit