$\langle X \rangle = G$ (oder, äquiv. dazu) mit $G \simeq F(X)/_N$

für einen NT $N \trianglelefteq F(X)$.)

Bem: Weil Kardinalzahlen wohlgeordn. sind, ex dieses Minimum und daher auch $X \subseteq G$ mit $|X| = rk(G)$.

Nun übersetzen wir die freien Gr. in Homotopieklassen

Def 2.25 Sei (X, x) ein zsh. Gph, $P(X, x)$ die Menge aller geschlossenen Wege in x.

Wir sagen, dass die Wege $p_1, p_2 \in P(X, x)$ homotop sind, wenn p_2 aus p_1 durch eine endl. Anzahl von Einfügen und Streichen von Teilwegen der Form $e\bar{e}$ entsteht, $[p]$ bezeichnet die Homotopiekl. von p.

Die Fundamentalgr. von X $\pi_1(X, x)$ bzgl. des Vertex x ist die Menge aller Homotopiekl. in $P(X, x)$ bzgl der Multipl. gegeben durch

$$[p][q] = [pq]$$

Bem: (i) Ist x_1 ein anderer Vertex, dann gilt

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, x_1).$$

Der Isom. wird gegeben durch $[p] \mapsto [qpq^{-1}]$, wobei q ein fester Weg von x nach x_1 ist

(ii) Jede Homotopiekl. enthält genau einen reduz. Weg.

(iii) Entsprechend kann man den Fundamentalgrupoid aller Wege in X definieren, wobei

$[p][q] = [pq]$ nur def. ist, falls der Endpkt von p mit dem Anfangspkt von q übereinstimmt.

Satz 2.26 Sei X ein zsh. Gph, $x \in X^0$ und T ein Spannbaum für X. Dann ist $\pi_1(X, x)$

freie Gr. mit Basis $S = \{[p_e] \mid e \in X^1_+ \setminus T\}$ wobei X^1_+ eine Orientierung für X ist und der Weg $p_e = p_{\alpha(e)} e \, p_{\omega(e)}^{-1}$ und p_v für $v \in X^0$ der eind. Weg von x nach v in T ist.

Bew: Ist $p = e_1 e_2 \cdots e_k$ ein geschl. Weg in X, der bei x beginnt, dann ist $[p] = [p_{e_1}] \cdots [p_{e_k}]$.
Weil $[p_e] = 1$ für $e \in T^1$, wird $\pi_1(X, x)$ von S erzeugt. Es genügt also die Eindeutigkeit einer reduz. Darst. zu zeigen. Sei $[p] = [p_{e_1}][p_{e_2}] \cdots [p_{e_k}]$ eine reduz. Darst. für p bzgl. S. Dann ist $e_i \in X^1 \setminus T^1$ und $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$ für alle $i = 1, \dots k$. Nach Konstruktion der Wege p_{e_i} kann es keine Kürzungen in $p_{e_1} p_{e_2} \cdots p_{e_k}$ geben, die eine Kante e_i streichen. Daher ist der Weg p homotop zu einem reduz. Weg $t_1 e_1 t_2 \dots e_k t_{k+1}$, wobei die t_i Wege in T sind. Da jede Homotopiekl. nur einen reduz. Weg enthält, ist die Folge $e_1, e_2, \dots e_k$ eind. durch $[p]$ bestimmt, d.h. die reduz. Form ist eind.

Darstellungen von Gruppen durch Erzeuger und Relationen

Def 2.27 Sei G eine Gr., $X \subseteq G$. Dann bezeichnet

$$X^G = \bigcap_{X \subseteq N \trianglelefteq G} N$$

den <u>normalen Abschluss</u> von X, d.h. den kleinsten NT, der X enthält.

Bem Für $X \neq \emptyset$ ist $X^G = \{ \prod_{i=1}^{k} g_i^{-1} x_i g_i \mid g_i \in G, x_i \in X^{\pm}, k \geq 0 \}$

Für $x \in X^G$ gilt $uxv \in X^G \Leftrightarrow uv \in X^G$
$\Leftrightarrow uvx \in X^G$.

Def. 2.28 Sei G eine Gr., $G = \langle X \rangle$, $X = (x_i)_{i \in I}$.
Dann ex. ein Epim. $\varphi: F(X) \longrightarrow G$, $x_i \mapsto x_i$
und $G \simeq F(X)/_{\ker \varphi}$. Ist $R \subseteq F$ mit $R^F = \ker \varphi$
dann ist G durch X, R eind. bestimmt.
(i) Wir schreiben $G = \langle X \mid R \rangle$ für die Präsentierung
von G mit Erzeugermenge X und Relationen R.

Bem: Auch wenn R^F nicht endl. erz. ist, kann
es als NT endl. erz. sein

(ii) Eine Gruppe G heißt <u>endl. präsentiert</u>, falls
$G = \langle X \mid R \rangle$ mit X und R endl.

Bsp: (i) Die Diedergruppe D_n hat die Präsent.
$$\langle a, b \mid a^2 = b^n = abab = 1 \rangle$$
oder $\langle a, c \mid a^2 = c^2 = (ac)^n \rangle$

(ii) Die unendl. Diedergr. D_∞ hat die Präsent.
$$\langle a, b \mid a^2 = abab = 1 \rangle$$
oder $\langle a, c \mid a^2 = c^2 = 1 \rangle$

(iii) Die Gruppe S_3 hat die Präsent.
$$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^3 \rangle$$
denn $S_3 \simeq D_6$

Bem: Sogar in der Klasse der endl. präsent. Gr.
ist das Wortproblem unentscheidbar: Es gibt
keinen Algorithmus, der für eine Gruppe $G = \langle X \mid R \rangle$
und w Wort über $X^{\pm}$ entscheidet, ob $w = 1_G$.
(oder ob $G = \{1\}$ oder ...)

<u>Satz</u> 2.29 Sei $G = \langle X \mid R \rangle$, G' eine Gr. Dann kann jede Abb. $\varphi: X \to G'$ mit $\varphi(r) = 1$ für $r \in R$ zu einem Homom. $\varphi: G \to G'$ fortgesetzt werden, d.h. jede Gruppe, in der die Rel. R gelten und die von X erz. ist, ist Quotient von G.

<u>Bew</u>: Jedes Elt von G ist von der Form $g = x_1 \dots x_k$, $x_i \in X^{\pm}$ (nicht notw. eind.). Wegen $\varphi(x_1 \dots x_k) = 1$ falls $x_1 \dots x_k = 1$, ist $\varphi(g) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_k)$ wohldef.

<u>Satz</u> 2.30 (B. Neumann) Sind $N \trianglelefteq G$, N, G/N endl. präs., dann ist G endl. präsent.

<u>Bew</u>: Sei $N \simeq \langle x_1, \dots x_m \mid r_1 = \dots = r_k = 1_G \rangle$ und

$G/N \simeq \langle y_1 N, \dots y_n N \mid s_1 = \dots = s_\ell = 1_{G/N} \rangle$.

Dann ist $G = \langle x_1, \dots x_m, y_1, \dots y_n \rangle$ und es gelten folgende Relationen für geeignete Ausdrücke t_j, u_{ij}, v_{ij} in $x_1, \dots x_m$

$$r_i(x) = 1, \quad s_j(y) = t_j(x) \quad (i = 1, \dots k, \ j = 1, \dots \ell)$$

$$y_j^{-1} x_i y_j = u_{ij}(x), \quad y_j x_i y_j^{-1} = v_{ij}(x) \quad (i = 1, \dots m, \ j = 1, \dots n)$$

d.h. $N \trianglelefteq G$.

Diese Rel. gelten in G. Ist $\bar{G}$ eine weitere Gr. mit diesen Erz. und nur diesen Rel., dann ex. Epim. $\alpha: \bar{G} \to G$
$\alpha(\bar{x}_i) = x_i$
$\alpha(\bar{y}_i) = y_i$, $K = \ker \alpha$.

Dann ist $\alpha: \bar{N} = \langle \bar{x}_1, \dots \bar{x}_m \rangle \to N$ ein Isom., also $K \cap \bar{N} = \{1\}$ und $\bar{N} \trianglelefteq \bar{G}$. Daher induz. α einen Epim. $\bar{\alpha}: \bar{G}/\bar{N} \to G/N$ mit $\bar{\alpha}(\bar{y}_i \bar{N}) = y_i N$. Dann ist auch $\bar{\alpha}$ Isom., d.h. $\ker \alpha = 1$, also $\bar{G} \simeq G$.

Bem 2.31 Ist $G = \langle S \rangle$, $X = \Gamma(G,S)$ dann lässt sich für eine Ugr $H \leq G$ der Faktorgph $\tilde{X} = {}_H\backslash X$ beschreiben als Vertexmenge ${}_H\backslash G$ und Kanten gegeben durch (Hg, Hgs), $s \in S$.

Ist nun T ein Spannbaum in $\tilde{X}$, dann ex für jede Nebenklasse Hu ein eind. Weg von H nach Hu. Dieser Weg entspricht einem Wort $w = s_1 \cdots s_t$, $s_i \in S^{\pm}$ mit $Hw = Hu$. Die Wahl eines Spannbaumes entspricht also der Wahl von Repräs. für die Nebenklassen auf dem Weg und zwar so, dass die linken Anfangsstücke den Weg beschreiben, d.h. $H, Hs_1, Hs_1s_2, \ldots Hw$, d.h. die Nebenklassen bilden eine Schreier-Transversale

Def 2.32 Eine (rechte) Schreier-Transversale für $H \leq G$, $G = \langle S \rangle$ ist eine Menge T von reduz. Wörtern über $S^{\pm}$, so dass für jede Nebenklasse $H \backslash G$ genau ein Repräs. ex und die Anfangsstücke dieser Wörter ebenfalls in T liegen.

Bem: Die Wahl eines Spannbaumes für $\tilde{X}$ entspricht also der Wahl einer Schreier-Transversalen für $H\backslash G$. Insbesondere ex. Schreier-Transversalen.

Lemma 2.33 Ist $\tilde{X} = {}_H\backslash\Gamma(G,S)$ der Faktorgph mit Spannbaum T, dann wird H erzeugt durch die Worte p_e, $e \in \tilde{X}^1_+ \backslash T$ mit p_e wie in 2.26.