Zu Satz 1.30:

Lemma: Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Sym}(X))$, $\alpha|_{\mathrm{Alt}(X)} = \mathrm{id}$.

Dann ist $\alpha = \mathrm{id}$.

Bew: Wegen $[\mathrm{Sym}(X) : \mathrm{Alt}(X)] = 2$ ist $\mathrm{Fix}\,\alpha = \mathrm{Alt}(X)$.

Sei $\tau = (a\,b)$ Transpos. Dann ist

$\alpha(\tau) = \tau_1 \dots \tau_m$ Produkt disj. Transpos.

1. Fall $\tau \neq \tau_i$, $i = 1, \dots k$

Dann ist wegen $\alpha(\tau)\alpha(\tau_1) = \tau\tau_1$ also

$\alpha(\tau_1) = \tau\,\tau_2 \dots \tau_k$.

Ist $\tau_1 = (c\,d)$, wähle $\sigma = (c\,e)$. Dann ist

$\alpha(\tau)\,\alpha(\sigma) = \tau\sigma = \tau_1 \dots \tau_k\,\alpha(\sigma)$

$\Rightarrow \alpha(\sigma) = \tau\,\sigma\,\tau_1 \dots \tau_k$ $\lightning$ $\mathrm{ord}(\sigma) = 2$

2. Fall: $\tau = \tau_1$

Dann ist $k \geq 3$, denn $\alpha(\tau)\,\alpha(\tau_2) = \tau\,\tau_2$.

Ist $\tau_2 = (c\,d)$, $\tau_3 = (e\,f)$ wähle $\sigma = (c\,e)$.

Dann ist $\alpha(\tau)\,\alpha(\sigma) = \tau\sigma = \tau\,\tau_2 \dots \tau_k\,\alpha(\sigma)$

also $\alpha(\sigma) = \sigma\,\tau_2\,\tau_3 \dots \tau_k$ $\lightning$ $\mathrm{ord}\,\sigma = 2$.

$|\mathcal{S}_1| = |G : G_x| = |G : P|$, d.h. $p \nmid |G:P|$ und $p^a \,|\, |P|$.
Es ist aber $|P| \leq p^a$, denn für $x \in X$, $g \in P$ ist $xg \in X$; und die xg, $g \in P$ sind pw. versch.

Also ist $|P| = p^a$ und P ein p-Sylowgr von G.

Sei nun $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ die Menge aller Konjug. von P unter G. Dann operiert auch $P \leq G$ auf $\mathcal{T}$ durch Konjugation. Nach der Bahnengleichung hat jede Bahn die Mächtigkeit p^i für ein $i \leq a$. Offensichtlich ist $P \in \mathcal{T}$ ein Fixpkt unter der Wirkung. Ist $P_1 \in \mathcal{T}$ ein weiterer Fixpkt, dann ist $P \leq N_G(P_1)$, also ist $PP_1 \leq G$. Wegen $|PP_1| = |P| \cdot |P_1| / |P \cap P_1|$ ist PP_1 eine p-Gr., also $|PP_1| \leq p^a$ und daher $P = P_1$, d.h. P ist der einzige Fixpkt und mit $n_p = |\mathcal{T}|$ gilt $n_p \equiv 1 \bmod p$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ ~~Stad~~ alle p-Sylowgr. enthält und jede p-Gr. in einer p-Sylowgr. enthalten ist.

Sei $P_2 \leq G$ eine p-Ugr, die in keinem Elt von $\mathcal{T}$ enthalten ist. Dann operiert auch P_2 durch Konj. auf $\mathcal{T}$. Hat P_2 auf $\mathcal{T}$ ein Fixpkt P_3, dann gilt wie eben $P_2 P_3 \leq G$ ist p-Ugr und $P_2 \leq P_3$ ↯
Also hat P_2 auf $\mathcal{T}$ keinen Fixpkt. Dann folgt aber $|\mathcal{T}| \equiv 0 \bmod p$ ↯ Daher ist jede

p-Ugr. in einem Elt von $\mathcal{J}$ enthalten. Insbesondere enthält $\mathcal{J}$ alle p-Sylowgr. und G ist trans. auf $\mathcal{J}$. Damit folgt auch

$$n_p = [G : N_G(P)] \,\big|\, [G : P].$$

Anwendung

<u>Bsp 1.33</u> ~~Jede~~ Es ex. keine einf. Gr. der Ord. 300.

<u>Bew:</u> Es ist $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, G eine Gr. mit $|G| = 300$. Eine 5-Sylowugr P von G hat Ord. 25. Dann ist $n_5 \equiv 1 \mod 5$ und $n_5 \mid 300/25 = 12$. Ist $n_5 = 1$, dann ex nur eine 5-Sylowugr und die ist NT. Ist $n_5 = 6$, dann hat G eine ~~Ugr $H = G_p$ von Index~~ 6 nicht-triv. Operation auf 6 Elten, d.h. es ex ein Homom. $\varphi : G \longrightarrow S_6$. Dann ist $\varphi(G) \leq S_6$, wegen $300 \nmid 6!$ ist φ nicht injektiv und $\ker\varphi \trianglelefteq G$.

<u>Lemma</u> 1.34 Sei G eine endl. Gr., P eine p-Sylowugr.

(i) Ist $N_G(P) \leq H \leq G$, dann ist $H = N_G(H)$.

(ii) Ist $N \trianglelefteq G$, dann ist $P \cap N$ p-Sylowugr. von N und PN/N p-Sylowugr von G/N.

<u>Bew:</u> (i) Sei $x \in N_G(H)$. Weil $P \leq H \trianglelefteq N_G(H)$ ist $P^x \leq H$. Weil auch P^x p-Sylowugr von H ist, ex. ein $h \in H$ mit $P^h = P^x$. Also ist $xh^{-1} \in N_G(P) \leq H$ und daher $h \in H$.

(iii) Es ist $|N : P \cap N| = |PN : P|$ teilerfremd zu p.
Weil $P \cap N$ p-Ugr. ist, ist $P \cap N$ also Sylowugr.
Ebenso für PN/N.

<u>Frattini-Argument:</u>

<u>Satz</u> 1.35 Sei G eine (bel.) Gr., $H \trianglelefteq G$ endlich, und P eine p-Sylowugp von H. Dann ist $G = N_G(P) H$.

<u>Bew</u>: Sei $g \in G$. Dann ist $P^g \leq H^g = H$ und also auch P^g p-Sylowugr. von H. Daher ex. ein $h \in H$ mit $P^g = P^h$, d.h. $gh^{-1} \in N_G(P)$ und $g \in N_G(P) H$.

§ 2 Kombinatorische Gruppentheorie

1. Teil: Bass-Serre-Theorie

Def 2.1 Ein Graph X besteht aus einer Menge $X^0 \neq \emptyset$ von Ecken (oder Vertices), einer Menge X^1 von Kanten und drei Abb. $\alpha: X^1 \to X^0$, $\omega: X^1 \to X^0$ und $\bar{\ }: X^1 \to X^1$ derart dass für alle $e \in X^1$ gilt $\bar{\bar{e}} = e$, $\bar{e} \neq e$, $\alpha(e) = \omega(\bar{e})$.

Die Ecken $\alpha(e)$ bzw $\omega(e)$ heißen Anfangs- bzw Endpunkt von e.

Der Graph heißt endlich, wenn X^0, X^1 endlich sind. (Achtung: Wenn X^0 endl. ist, darf X^1 unendl. sein!)

Eine Morph. p zwischen Graphen X, Y ist eine Abb, die Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten abb. und derart, dass $p(\alpha(e)) = \alpha(p(e))$, $p(\omega(e)) = \omega(p(e))$ gilt. (Not $p: X \to Y$) Ist p bij., dann ist p ein Isomorphismus. Ist X ein Graph, dann ist $\mathrm{Aut}(X)$ die Gr. der Autom. von X, d.h. von Isom. von X auf sich selbst. Für $x \in X^0$, $y \in Y^0$ schreiben wir auch $p: (X,x) \to (Y,y)$, falls $p(x) = y$.

Für $x \in X^0$ ist $\mathrm{star}(x) = \{e \in X^1 \mid \alpha(e) = x\}$ und $\mathrm{val}(x) = |\mathrm{star}(x)|$.

Ein Homom. $p: X \to Y$ heißt lokal injektiv, falls $p|_{\mathrm{star}(x)}$ inj. ist für jedes $x \in X^0$.

Wir sagen, dass X *orientiert* ist, wenn aus jedem Paar $e, \bar{e} \in X'$ eine Kante gewählt ist, die dann pos. orient. heißt, $X'_+ =$ pos. orient.

$X'_- =$ neg. orient. $= X' \setminus X'_+$.

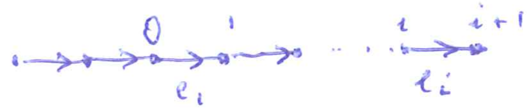
Eine Folge $l = e_1 e_2 \ldots e_n$ von Kanten in X heißt Weg (oder Pfad) der Länge n, falls $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$, $i = 1, \ldots n-1$. Dann heißt l Weg von $\alpha(e_1)$ nach $\omega(e_n)$.
Jedes Vertex ist ein Weg der Länge 0.
Ein Weg l heißt *reduziert*, falls l Länge 0 hat oder $l = e_1 \ldots e_n$ mit $e_i \neq \bar{e}_{i+1}$, und l heißt *geschlossen*, falls $\alpha(e_1) = \omega(e_n)$.

Ein Gph X heißt zusammenhängend, falls es für je zwei Vertices x_1, x_2 ein Weg l von x_1 nach x_2 gibt.

Bsp: C_n bezeichne den Graphen mit Vertices $\{0, \ldots n-1\}$, und Kanten $e_i, \bar{e}_i$, $i = 0, \ldots n-1$ mit $\alpha(e_i) = i$, $\omega(e_i) = i+1$.
C_∞ hat Vertices $\mathbb{Z}$, Kanten $e_i, \bar{e}_i$, $i \in \mathbb{Z}$, $\alpha(e_i) = i$, $\omega(e_i) = i+1$

C_n

C_∞



Def: Ein Zykel in einem Graph X ist ein Teilgph $\cong C_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Ein *Baum* ist ein zsh Graph ohne Zykel.

Bem: Offensichtl. gibt es für Vertices x, y in einem Baum einen *eind.* reduz. Weg von x nach y.

Lemma 2.2 Ist T ein max. Teilbaum (bzgl $\leq$) in einem zsh. Gphen X, dann enthält T alle Vertices von X.

Bew: Andernfalls gäbe es eine Kante $y \in X'$ mit $\alpha(y) \in T$, $\omega(y) \notin T$. Dann wäre $T \cup y$ ein größerer Teilbaum. $\lightning$

Ein max. Teilbaum eines zsh. Graphen heißt Spannbaum.

Def 2.3 Eine Gr. G oper. auf einem Gph X (von links), falls G auf X^0, X' operiert mit $g\alpha(e) = \alpha(g(e))$, $g\bar{e} = \overline{ge}$ für $g \in G$, $e \in X'$.

G operiert ohne Inversion, falls $ge \neq \bar{e}$ für alle $g \in G$, $e \in X'$.

Bei der Basse-Serre-Theorie wird immer vorausgesetzt, dass G auf X ohne Inversion operiert. Dies lässt sich leicht erreichen:

Def 2.4 Für einen Gph X sei B(X) die baryzentrische Unterteilung von X: Jede Kante e wird in Kanten e_1, e_2 aufgeteilt mit einem neuen Vertex v_e und $\alpha(e_1) = \alpha(e)$, $\omega(e_1) = v_e = \alpha(e_2)$, $\omega(e_2) = \omega(e)$ und $(\bar{e})_2 = \bar{e}_1$, $(\bar{e})_1 = \bar{e}_2$, $v_e = v_{\bar{e}}$.

Wenn G auf X operiert, dann auch auf B(X) durch $ge_1 = (ge)_1$, $g(e_2) = (ge)_2$, $gv_e = v_{g(e)}$ und gx für $x \in X^0$ wie vorher

Lemma 2.5 G operiert auf B(X) ohne Inversion.

Bew ÜA

Def 2.6 Sei G eine Gr., die auf dem Gph X ohne Inversion operiert. Für $x \in X^0 \cup X'$ sei $O(x)$ die Bahn von x unter G.

Der Faktorgph $G \backslash X$ ist der Gph mit Vertexmenge $O(v)$, $v \in X^0$, Kantenmenge $O(e)$ mit $e \in X'$ und mit

(i) $\alpha\,\mathcal{O}(e) = \mathcal{O}(v)$, falls $gv = \alpha(e)$ für ein $g \in G$

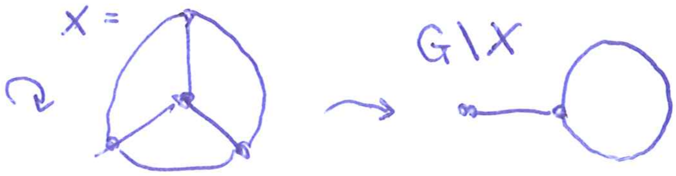
(ii) $\overline{\mathcal{O}(e)} = \mathcal{O}(\bar{e})$.

(Weil G ohne Inversion oper., ist $\mathcal{O}(e) \neq \mathcal{O}(\bar{e})$.)

Die Abb. $p: X \to G\backslash X$, $p(x) = \mathcal{O}(x)$, $x \in X^0 \cup X^1$ heißt Projektion und ist ein Gphhomomorph.

Für $y \in G\backslash X$ (Ecke oder Kante) heißt $x \in X^0 \cup X^1$ mit $p(x) = y$ ein Lift von y.

Bsp 2.7 $X =$ $G\backslash X$ $G = \mathbb{Z}/3$



Prop. 2.8 Sei G eine Gr., die ohne Inversion auf dem zsh. Gph X operiert. Für jeden Teilbaum T' in $G\backslash X = X'$ ex. ein Teilbaum T in X, so, dass $p|_T : T \to T'$ ein Isom. ist.

Bew: Sei $\mathcal{T}$ die Menge aller Teilbäume, die ~~sich~~ injektiv nach T' ~~projizieren~~. Diese Menge ist nicht-leer (ein Lift eines Vertex von T' liegt in $\mathcal{T}$) und durch $\subseteq$ partiell geordnet. Jede aufsteigende Kette hat eine obere Schranke, nämlich die Vereinigung. Nach Zorns Lemma hat $\mathcal{T}$ ein max. Elt. $T \in \mathcal{T}$.

Beh: $p(T) = T'$.

Bew: Sonst ex eine Kante $e' \in X' = G\backslash X$ mit $\alpha(e') \in p(T)$, $w(e') \in T' \setminus p(T)$. Sei $e \in X^0$ Kante mit $p(e) = e'$, $x = \alpha(e)$, also $\mathcal{O}(x) = \alpha(e') \in p(T)$ nach Def.

Daher ex $g \in G$ mit $g(x) \in T$. Dann ist $g(e) \in X^1$ Kante mit $\mathcal{O}(\alpha\, g(e)) \in p(T)$, $\mathcal{O}(w\,g(e)) \notin p(T)$. $\lightning$ Max von T.