

Falls $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ k.e.S. ist mit P projektiv, setze

$$\pi(M) := [A]$$

- Nach Schanuel hängt das nicht von der Wahl der k.e.S. ab.
- $[M] = [M'] \Rightarrow \pi(M) = \pi(M')$

Daraus folgt, für eine proj. Auflösung $\dots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$:

$[Ker d_n] = \pi^n(M)$ hängt nicht von der Auflösung ab.

Die homologische (oder proj.) Dim von M ist das kleinste n , so dass M eine proj. Auflösung der Länge n hat (d.h. mit $P_{n+1} = \dots = 0$); äquivalent

$$hd(M) = \min \{ n \mid \pi^n(M) = 0 \} \quad (\text{wobei } \pi^0(M) = [M])$$

Bsp: • M Proj. $\Leftrightarrow hd(M) = 0$

$$\bullet hd(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 1$$

Die globale Dim. eines Rings R ist

$$gldim(R) = \sup \{ hd(M) \mid M \text{ ist } R\text{-Mod} \}$$

Genauer: ex. rechte und linke glob. dim., aber die sind gleich falls R noethersch.

Bsp: K Körper $\Rightarrow gldim(K) = 0, gldim(M_n(K)) = 0$

Bem.: Entsprechend gibt es den Begriff der injektiven Auflösung von M :

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} \dots \quad \text{Existenz nach Satz 2.12}$$

(I^i, d^i) ist Kokettenkomplex: Komplex mit umgekehrter Pfeilrichtung; siehe Indizes oben.

- Habe auch duales zu Schanuels Lemma, injektive Äquivalenz, inj. Dim.
- $gldim(R) = \text{Supremum der inj. Dim.}$

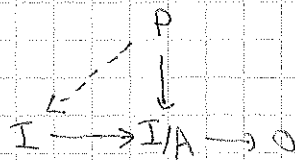
Wichtiger Spezialfall: $gldim \leq 1$

Satz 2.19: Für einen Ring R sind äquivalent:

- (i) Jeder Quotient eines inj. Moduls ist inj.
- (ii) Jeder Untermodul eines proj. Moduls ist proj. $(\Leftrightarrow gldim(R) \leq 1)$
- (iii) Jedes Rechtsideal von R ist proj.

Wir benötigen ein Lemma:

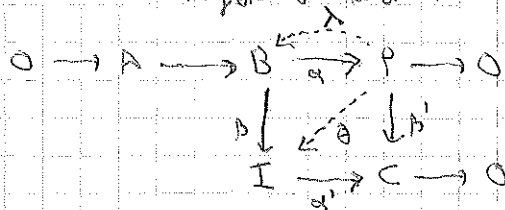
Lemma 2.20: Ein R -Modul P ist projektiv g.d.w. jeder Homom. von P zu $-41-$
 einem Quotienten eines injektiven Moduls I zu I geliftet werden kann:



Bew: " \Rightarrow " klar.

" \Leftarrow " Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow 0$ gegeben.

Betrachte $B \subset I$ injektiv und Pushout C :

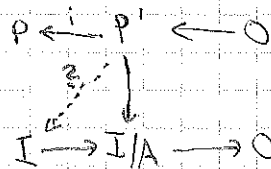


N.V. ex. $\theta: P \rightarrow I$ mit $\alpha' \theta = \beta'$

β mono $\Rightarrow \beta$ Pullback $\Rightarrow (\text{id}_P, \theta)$ induziert $\lambda: P \rightarrow B$ mit
 $\alpha \lambda = \text{id}_P, \beta \lambda = \theta$.

Insb. splittet die Sequenz $\Rightarrow P$ projektiv. □

Bew (2.19): (i) = (ii)



Gegeben: P projektiv, $P' \subset P$,
 I injektiv, $P' \rightarrow I/A$.

Gesucht: $P' \rightarrow I$ so dass Diag. kommut.

I/A ist inj. nach Vor. \Rightarrow ex. $P \rightarrow I/A$

P proj. \Rightarrow ex. $P \rightarrow I$

Gesuchte Abb. ist $P' \rightarrow P \rightarrow I$

(ii) \Rightarrow (iii) trivial

(iii) \Rightarrow (i)



I injektiv, z.Z. I'' injektiv.
 Nach Baers Kriterium suche, für $0 \in R$
 und $\alpha \rightarrow I''$, Homom. $R \rightarrow I''$

Das ist dual zu (i) \Rightarrow (ii). □

Bem.: Solche Ringe heißen rechts-erblich. (Entsprechend: links-erblich)

• Hauptidealringe sind erblich.

• Ein Dedekind-Ring ist ein kommutativer, nullteilerfreier, erblicher Ring.

Ziel: Homologie-Gruppen von Komplexen (C, d) definieren, insbes. falls (C, d) entstanden ist durch Anwenden eines addit. Funktors auf die Auflösung eines Moduls.

Die i -te Homologie misst die Inexaktheit von (C, d) bei C_i .

Def. 2.21: Sei (C, d) ein R -Komplex.

- Setze: $Z_i = Z_i(C) := \ker d_i \subset C_i$ " i -Zykel"
 $B_i = B_i(C) := \text{im } d_{i+1} \subset C_i$ " i -Ränder"
- Habe $B_i \subset Z_i$, da $d_i \circ d_{i+1} = 0$
- Setze $H_i(C) := Z_i / B_i$ " i -te Homologie von C "
- Habe $H_i(C) = 0 \Leftrightarrow (C, d)$ exakt bei i
- H_i ist ein Funktor R -Komplexe $\rightarrow R$ -Moduln:

$$\begin{array}{ccc}
 C_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & C_i \\
 d_{i+1} \downarrow & & \downarrow d_i \\
 C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} \\
 d_i \downarrow & & \downarrow d_{i-1} \\
 C_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & C_{i-2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \alpha_i(Z_i) \subset Z_i, \quad \alpha_i(B_i) \subset B_i \\
 \Rightarrow \text{erhalte } \tilde{\alpha}_i: H_i(C) \rightarrow H_i(C') \\
 \text{mit } \tilde{\alpha}_i(z + B_i) = \alpha_i(z) + B_i'
 \end{array}$$

- Entsprechend für Kokettenkomplexe: $C^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1}$
Kozykel $Z^i = \ker d^i$, Koränder $B^i = \text{im } d^{i-1}$, i -te Kohomologie $H^i = Z^i / B^i$

Komplexe können als graduierte Differentialmoduln aufgefasst werden:

- (M, d) heißt Differentialmodul falls $d \in \text{End}(M)$ und $d^2 = 0$

Diff-Moduln bilden eine abelsche Kat mit Morphismen $f: (M, d) \rightarrow (M', d')$

falls

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{d} & M \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 M' & \xrightarrow{d'} & M'
 \end{array}
 \quad \text{Kommutiert.}$$

- Die Homologie von M ist $H(M) = \ker d / \text{im } d$
- Ein graduierter R -Modul ist ein R -Modul der Form $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$
 $f: M \rightarrow M'$ ist Homom. vom Grad d falls $f(M_i) \subset M'_i$ und
 Graduierte R -Mod mit Homom. vom Grad 0 bilden abelsche Kat.

• Habe Äquivalenz von Kategorie

Kettenkomplex \rightarrow graduierte Differentialmoduln (M, d) mit d vom Grad -1

$$(C, d) \mapsto \left(\bigoplus_i C_i, \bigoplus_i d_i \right)$$

• In diesem Fall: $H(M) = \bigoplus_i \ker d_i / \text{im } d_{i+1} = \bigoplus H_i(C)$ graduiertes Modul

Damit lässt sich der Satz über lange exakte Homologiesequenzen leichter formulieren:

Satz 2.22. • Ist $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$ eine k.e.S von Differentialmoduln,

dann ex. ein Homom. $\Delta: H(M'') \rightarrow H(M')$, das natürlich ist in $M' \hookrightarrow M \rightarrow M''$

ist, so dass Δ exakt ist.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(M) & & \\
 & H(\alpha) \nearrow & & \searrow H(\beta) & \\
 H(M') & & & & H(M'') \\
 & \longleftarrow \Delta & & &
 \end{array}$$

Δ heißt Verbindungshomom.

• Falls M', M, M'' graduiert mit d', d, d'' vom Grad -1 und α, β vom Grad 0 ,

dann ist Δ vom Grad -1 .

In Komplexen ausgedrückt: $0 \rightarrow (C', d') \xrightarrow{\alpha} (C, d) \xrightarrow{\beta} (C'', d'') \rightarrow 0$ liefert exakte Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_i(C') \xrightarrow{\tilde{\alpha}_i} H_i(C) \xrightarrow{\tilde{\beta}_i} H_i(C'') \xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(C') \xrightarrow{\tilde{\alpha}_{i-1}} H_{i-1}(C) \xrightarrow{\tilde{\beta}_{i-1}} H_{i-1}(C'') \xrightarrow{\Delta} \dots$$