Falls $0 \to A \to P \to M \to 0$ k.e.S. ist mit P projektiv, setze
$\pi(M) := [A]$.

- Nach Schanuel hängt das nicht von der Wahl der k.e.S. ab.
- $[M]=[M'] \Rightarrow \pi(M) = \pi(M')$.

Daraus folgt, für eine proj. Auflösung $\ldots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \ldots \xrightarrow{d_1} P_0 \to M \to 0$:

$$[\ker d_n] = \pi^n(M) \text{ hängt nicht von der Auflösung ab.}$$

Die homologische (oder proj.) Dim von M ist das kleinste n, so dass M eine proj. Auflösung der Länge n hat (d.h. mit $P_{n+1} = \ldots = 0$); äquivalent

$$\underline{hd(M)} = \min\{ n \mid \pi^n(M) = 0 \} \qquad (\text{wobei } \pi^0(M)=[M])$$

Bsp: • M Proj. $\Leftrightarrow hd(M)=0$

• $hd(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=1$

Die globale Dim. eines Rings R ist

$$gl\dim(R) = \sup\{ hd(M) \mid M \text{ ist } R\text{-Mod} \}$$

Genauer: ex. rechte und linke glob. dim, aber die sind gleich falls R noethersch.

Bsp: K Körper $\Rightarrow gl\dim(K)=0$, $gl\dim(M_n(K))=0$

Bem: • Entsprechend gibt es den Begriff der injektiven Auflösung von M:

$$0 \to M \to I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \qquad \text{Existenz nach Satz 2.12.}$$

(I^i, d^i) ist Kokettenkomplex: Komplex mit umgekehrter Pfeilrichtung; schreibe Indizes oben.

• Habe auch duales zu Schanuels Lemma, injektive Äquivalenz, inj. Dim

• $gl\dim(R)$ = Supremum der inj. Dim.

Wichtiger Spezialfall: $gl\dim \leq 1$

Satz 2.19: Für einen Ring R sind äquivalent:

(i) Jeder Quotient eines inj. Moduls ist inj.

(ii) Jeder Untermodul eines proj. Moduls ist proj. $\quad (\Leftrightarrow gl.\text{-}\dim(R) \leq 1)$

(iii) Jedes Rechtsideal von R ist proj.

Wir benötigen ein Lemma:

<u>Lemma 2.20</u>: Ein R-Modul P ist projektiv g.d.w. jeder Homom. von P zu einem Quotienten eines injektiven Moduls I zu I geliftet werden kann:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\ I \arrow[r] & I/A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

<u>Bew:</u> „⇒" Klar.

„⇐" Sei $0 \to A \to B \to P \to 0$ gegeben.

Betrachte $B \subset I$ injektiv und Pushout C:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] \arrow[l, dashed, bend right, "\lambda"'] \arrow[dl, dashed, "\theta"'] & 0 \\ & & I \arrow[r, "\alpha'"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

N.V. ex. $\theta : P \to I$ mit $\alpha'\theta = \beta'$

β mono $\Rightarrow$ B Pullback $\Rightarrow (id_P, \theta)$ induziert $\lambda : P \to B$ mit

$\alpha\lambda = id_P$, $\beta\lambda = \theta$.

Insbes. splittet die Sequenz $\Rightarrow$ P projektiv. □

<u>Bew (2.19)</u>: (i) ⇒ (ii)

$$\begin{tikzcd} P & P' \arrow[l, "i"'] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "?"'] & 0 \arrow[l] \\ I \arrow[r] & I/A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

<u>Gegeben</u>: P projektiv, $P' \subset P$, I injektiv, $P' \to I/A$.

<u>Gesucht</u>: $P' \to I$ so dass Diag. komm.

I/A ist inj. nach Vor. $\Rightarrow$ ex. $P \to I/A$

P proj. $\Rightarrow$ ex. $P \to I$

Gesuchte Abb. ist $P' \to P \to I$

(ii) ⇒ (iii) trivial

(iii) ⇒ (i)

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] & I'' \arrow[r] & 0 \\ R \arrow[ur, dashed, "?"] & \mathfrak{a} \arrow[l, hook'] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

I injektiv, z.z.: I'' injektiv.

Nach Baers Kriterium suche, für $\mathfrak{a} \subset R$ und $\mathfrak{a} \to I''$, Homom. $R \to I''$

Das ist dual zu (i) ⇒ (ii). □

<u>Bem:</u>
- Solche Ringe heißen <u>rechts-erblich</u>. (Entsprechend: <u>links-erblich</u>)
- Hauptidealringe sind erblich.
- Ein <u>Dedekind-Ring</u> ist ein kommutativer, nullteilerfreier, erblicher Ring.

Ziel: Homologie-Gruppen von Komplexen (C,d) definieren, insbes. falls (C,d) entstanden ist durch Anwenden eines addit. Funktors auf die Auflösung eines Moduls.

Die i-te Homologie misst die Inexaktheit von (C,d) bei C_i.

Def. 2.21: Sei (C,d) ein R-Komplex.

- Setze: $Z_i = Z_i(C) := \ker d_i \subset C_i$ „i-Zykel"

  $B_i = B_i(C) := \operatorname{im} d_{i+1} \subset C_i$ „i-Ränder"
- Habe $B_i \subset Z_i$, da $d_i d_{i+1} = 0$
- Setze $H_i(C) := Z_i / B_i$ „i-te Homologie von C"
- Habe $H_i(C) = 0 \iff (C,d)$ exakt bei i
- H_i ist ein Funktor R-Komplexe $\longrightarrow$ R-Moduln:

$$\begin{array}{ccc} C_{i+1} & \xrightarrow{\alpha_{i+1}} & C'_{i+1} \\ d_{i+1}\downarrow & & \downarrow d'_{i+1} \\ C_i & \xrightarrow{\alpha_i} & C'_i \\ d_i \downarrow & & \downarrow d'_i \\ C_{i-1} & \xrightarrow{\alpha_{i-1}} & C'_{i-1} \end{array}$$

$\alpha_i(Z_i) \subset Z'_i$, $\alpha_i(B_i) \subset B'_i$

$\Rightarrow$ erhalte $\tilde\alpha_i : H_i(C) \longrightarrow H_i(C')$

mit $\tilde\alpha_i(z + B_i) = \alpha_i(z) + B'_i$

- Entsprechend für Kokettenkomplexe: $C^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1}$

  Kozykel $Z^i = \ker d^i$, Koränder $B^i = \operatorname{im} d^{i-1}$, i-te Kohomologie $H^i = Z^i / B^i$

Komplexe können als graduierte Differentialmoduln aufgefasst werden:

- (M,d) heißt Differentialmodul falls $d \in \operatorname{End}(M)$ und $d^2 = 0$

  Diff-Moduln bilden eine abelsche Kat. mit Morphismen $f : (M,d) \to (M',d')$ falls

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{d} & M \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ M' & \xrightarrow{d'} & M' \end{array}$$

kommutiert.

- Die Homologie von M ist $H(M) = \ker d / \operatorname{im} d$
- Ein graduierter R-Modul ist ein R-Modul der Form $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$

  $f : M \to M'$ ist Homom. vom Grad d falls $f(M_i) \subset M'_{i+d}$

  Graduierte R-Mod mit Homom. vom Grad 0 bilden abelsche Kat.

- Habe Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Kettenkomplexe} \longrightarrow \text{graduierte Differentialmoduln } (M,d) \text{ mit } d \text{ vom Grad } -1$$
$$(C,d) \longmapsto \left(\bigoplus_i C_i, \bigoplus_i d_i\right)$$

- In diesem Fall: $H(M) = \bigoplus_i \ker d_i / \operatorname{im} d_{i+1} = \bigoplus H_i(C)$ graduierter Modul

Damit lässt sich der Satz über lange exakte Homologiesequenzen leichter formulieren:

<u>Satz 2.22</u>: • Ist $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ eine k.e.S von Differentialmoduln, dann ex. ein Homom. $\Delta : H(M'') \longrightarrow H(M')$, der natürlich ist in $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ ist, so dass

$$\begin{tikzcd} & H(M) \arrow[dr, "H(\beta)"] & \\ H(M') \arrow[ur, "H(\alpha)"] & & H(M'') \arrow[ll, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

exakt ist.

Δ heißt <u>Verbindungshomom.</u>

- Falls M', M, M'' graduiert mit d', d, d'' vom Grad -1 und α, β vom Grad 0, dann ist Δ vom Grad -1.

In Komplexen ausgedrückt: $0 \to (C', d') \xrightarrow{\alpha} (C,d) \xrightarrow{\beta} (C'', d'') \longrightarrow 0$ liefert exakte Sequenz

$$\ldots \xrightarrow{\Delta} H_i(C') \xrightarrow{\bar{\alpha}_i} H_i(C) \xrightarrow{\bar{\beta}_i} H_i(C'') \xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(C') \xrightarrow{\bar{\alpha}_{i-1}} H_{i-1}(C) \xrightarrow{\hat{\beta}_{i-1}} H_{i-1}(C'') \xrightarrow{\Delta} \ldots$$