<u>Lemma 2.23</u> Wenn das Diagramm kommutiert und ex. Reihen hat, dann ist $(\operatorname{im}\lambda' \cap \operatorname{im}\beta)/\operatorname{im}\beta\lambda$

$$\cong \ker\mu'\beta/\ker\beta + \ker\mu$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C'
\end{tikzcd}$$

<u>Bew:</u> Es ist $\operatorname{im}\beta \cap \operatorname{im}\lambda' = \operatorname{im}\beta \cap \ker\mu'$

$$= \{\beta(x) \mid \mu'\beta(x) = 0\}$$

$$= \beta(\ker\mu'\beta)$$

und $\operatorname{im}\beta\lambda = \beta(\operatorname{im}\lambda) = \beta(\ker\mu) = \beta(\ker\beta + \ker\mu)$

Wegen $\ker\beta \subseteq \ker\mu'\beta$, $\ker\beta \subseteq \ker\beta + \ker\mu$ folgt

$$\ker(\mu'\beta)/\ker\beta + \ker\mu \cong \frac{\beta(\ker\mu'\beta)}{\beta(\ker\beta + \ker\mu)} \cong \operatorname{im}\lambda' \cap \operatorname{im}\beta/\operatorname{im}\beta\lambda.$$

$i(\mathrm{I})$ ″ $\qquad\qquad =: k(\mathrm{II})$

<u>Lemma 2.24</u> Wenn das Diagramm kommutiert und ex. Reihen hat

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' &
\end{tikzcd}$$

dann kommutiert auch folgendes Diagr. mit ex. Reihen und Spalten, wobei λ^*, μ^* und λ'_*, μ'_* die induz. Abb. sind.

Ist λ mono, dann auch λ^*; ist μ' epi, dann auch μ'_*.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[r] \arrow[d, dash] \arrow[dr, phantom, "1"] & X \arrow[d] & \\
 & \ker\alpha \arrow[r, "\lambda^*"] \arrow[d] & \ker\beta \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "3"] & \ker\gamma \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "5"] & B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "4"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 & \\
0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "7"] & A' \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "6"] & B' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d] & C' \arrow[d] & & \\
Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "8"] & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r, "\lambda'_*"] \arrow[d] & \operatorname{coker}\beta \arrow[r, "\mu'_*"] & \operatorname{coker}\gamma & & \\
Y \arrow[r] & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

<u>Bew</u> Diagrammjagd...

<u>Lemma 2.25</u> (Schlangenlemma) In der Situation von Lemma 2.24 ex $\Delta : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$, so dass die erste und letzte Reihe durch Δ zur ex. Seq. verbunden werden.

<u>Bew</u>: Es genügt z.z. $\operatorname{coker}\mu^* \simeq \ker\lambda'_*$.

Schreibe $X = \operatorname{coker}\mu^*$, $Y = \ker\lambda'_*$ und benutze 2.23

$X \simeq i(1) \simeq k(2) \simeq i(3) \simeq \ldots \simeq k(8) \simeq Y$

<u>Bew</u> von Satz 2.22: Wir können nach Lemma 2.24 folg. komm. Diagramm mit ex. Reihen und Spalten betrachten

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & Z'' \arrow[d] & \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d, "d'"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[d] & \\
 & M'/B' \arrow[r] & M/B \arrow[r] & M''/B'' &
\end{tikzcd}$$

Wegen $d(M) \subseteq Z$, $d(B) = 0$ induziert $d: M \to M$ einen Homom. $\bar{d}: M/B \to Z$. Dann ist $\ker \bar{d} = \operatorname{coker} \bar{d} = Z/B =: H$

Damit erhalten wir ein kommut. Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H' \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & H'' \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "\Delta"] & \\
 & M'/B' \arrow[r] \arrow[d] & M/B \arrow[r] \arrow[d] & M''/B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & Z'' \arrow[d] & \\
 & H' \arrow[r] & H \arrow[r] & H'' &
\end{tikzcd}$$

Dies ist nach Lemma 2.24 ex. in Zeilen und Spalten.
Nach dem Schlangenlemma gibt es einen Homom.
$\Delta: H'' \to H$, der das Homol. dreieck ex. macht.
Nach Konstr. ist Δ natürl. in M. $\square$

Spezialfall lange ex. Homologiefolge

<u>Satz</u> 2.26 Ist $0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$ eine ex. Folge von Komplexen, dann ex. verbindende Homom. $\Delta_i: H_i(C'') \to H_{i-1}(C')$, so dass folg. Sequenz ex. ist.

$$\ldots \xrightarrow{\tilde{\beta}_{i+1}} H_{i+1}(C'') \xrightarrow{\Delta_{i+1}} H_i(C') \xrightarrow{\tilde{\alpha}_i} H_i(C) \xrightarrow{\tilde{\beta}_i} H_i(C'') \xrightarrow{\Delta_i} H_{i-1}(C') \to$$

<u>Def</u> 2.27 (i) Sind (M,d), (M',d') Diffmoduln, dann heißen $f,g: M \to M'$ <u>homotop</u>, wenn es einen R-Hom. $s: M \to M'$ gibt mit $f-g = d's + sd$.
In dem Fall heißt s Homotopie, $f \simeq g$.

(ii) Der Homom. $f: M \to M'$ heißt Kettenäquiv. (oder Homotopieäquiv.), wenn es einen Kettenmorph.
$f': M' \to M$ gibt mit $ff' \simeq id_{M'}$, $f'f \simeq id_M$.

<u>Lemma</u> 2.28 Sind $f,g: M \to M$ homotop, dann ist $\tilde{f} = H(f) = H(g) = \tilde{g}$. Ist f eine Kettenäquiv. dann ist $\hat{f}: H(M) \to H(M')$ ein Isom.

<u>Bew:</u> Offensichtlich folgt die zweite Bemerkung aus der ersten. Wegen der Linearität genügt es z.z:
$f \simeq 0 \Rightarrow \tilde{f} = 0$: Ist $z \in Z(M)$, dann ist $d(z) = 0$ und wegen $f = d's + sd$ folgt dann

$$f(z) = d's(z) + sd(z) = d's(z) \in B(M')$$

Daher ist $f(Z(M)) \subseteq B(M')$, d.h. $\tilde{f} = 0$.

<u>Bem:</u> Für grad. Moduln müssen die Diff.abb. in M und in M' denselben Grad haben.

Wir werden sehen, dass je zwei proj. Auflösungen eines R-Moduls Kettenäquiv. sind, die Homol.gr. also nicht von der proj. Auflösung abhängen.
Zuerst zeigen wir eine Universalitätseigenschaft.

Satz 2.29 Sind (C,ε) und (C',ε') Auflösungen von M bzw M' mit (C,ε) proj. und ist $\varphi: M\to M'$ ein Homom., dann ex. ein bis auf Kettenäquiv. eindeutiges Kettenhomom. $\alpha: C\to C'$, so dass das Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & C_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"'] & \cdots & \arrow[r] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
\arrow[r] & C_i' \arrow[r] & C_{i-1}' \arrow[r] & & \arrow[r] & C_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dann heißt α ein Lift von φ, und je zwei Lifts sind homotop.

Bew: Wir konstruieren $\alpha_i: C_i\to C_i'$ mit $\alpha_{i-1}d_i = d_i'\alpha_i$ und $\varepsilon'\alpha_0 = \varphi\varepsilon$ mit Ind. über i und $\alpha_{-1}=\varphi$.
Ist α_{i-1} konstruiert, dann haben wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & C_i \arrow[dl, dashed, "\alpha_i"'] \arrow[d, "\alpha_{i-1}d_i"] & \\
C_i' \arrow[r] & \operatorname{im} d_i' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und α_i ex. weil C_i proj. ist.

Für die Eindeutigkeit: Ist $\alpha+\beta$ ein weiteres Lift von φ, dann ist β ein Lift von 0 und wir können wie oben $s_n: C_n\to C'_{n+1}$ finden mit

$$d's_n + s_{n-1}d = \beta_n = (\alpha+\beta)-\alpha$$

und $\quad d's_0 = \beta_0$

Kor 2.30 Sind (C,ε), (C',ε') proj. Aufl. eines Moduls M, dann sind C und C' Kettenäquiv. und haben daher isom. Homol.gruppen.

Nun können wir deriv. Funktoren definieren, nämlich die Homologiefunktoren angewendet auf den Komplex, den man aus einer proj. Auflösung durch Anwenden eines rechtsex. Funktors erhält, speziell für $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ (bzw für linksex. und $-\otimes_R A$). Ziel ist es z.z., dass diese Funktoren nur von M, nicht von der proj. Aufl. abhängen.

Def 2.31 <u>Derivierte Funktoren</u>. Sei $F: R\text{-mod} \to Ab$ ein add. Funktor. Sei M ein R-Modul, (C,ε) eine proj. Auflösung. Dann ist $(F(C), F(\varepsilon))$ ein Komplex über FM und wir def. den n-ten links-deriv. Funktor L_nF von F als

$$(L_nF)M = H_n(FC)$$

$$(L_nF)(\mu) = \widetilde{F(\alpha_n)} \quad \text{für } \mu \in \hom_R(M,M')$$

α Lift von μ auf $C \to C'$

Wir müssen zeigen, dass dies ein wohldef. Funktor $L_nF: R\text{-mod} \longrightarrow Ab$ ist, also nicht von den Auflösungen (C,ε) von M und (C',ε') von M' abhängt.

Seien also $\mu: M \to M'$ und Aufl. $(C,\varepsilon), (C',\varepsilon')$ von M bzw M' gegeben. Dann liftet $\alpha: C \longrightarrow C'$ so, dass $\mu\varepsilon = \varepsilon'\alpha_0$ gilt. Weil F ein add. Funktor ist, ist auch $F(\alpha): FC \longrightarrow FC'$ so dass gilt

$F(\mu)F(\varepsilon) = F(\varepsilon')F(\alpha_0)$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to & FC_1 & \xrightarrow{Fd_1} & FC_0 & \xrightarrow{F(\varepsilon)} & FM & \to 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle F(\alpha_1)} & & \downarrow{\scriptstyle F\alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle F\mu} & \\
\cdots \to & FC_1' & \longrightarrow & FC_0' & \longrightarrow & FM' & \to 0
\end{array}$$

Wir erhalten $\widetilde{F(\alpha_n)} : H_n(FC) \to H_n(FC')$ und müssen zeigen, dass das von Lift α unabh. ist: Ist β ein weiterer Lift von μ, dann sind α, β homotop, d.h. es ex. für $n \geq 0$ Homom $s_n : C_n \to C'_{n+1}$ mit $\alpha_n - \beta_n = d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n$.
Weil F add. ist, gilt dann auch

$$F(\alpha_n) - F(\beta_n) = F(d'_{n+1}) F(s_n) + F(s_{n-1}) F(d_n),$$

d.h. $F(\alpha_n)$ und $F(\beta_n)$ sind homotop und daher $\widetilde{F(\alpha_n)} = \widetilde{F(\beta_n)}$.

Noch z.z. $(L_n F)M$ hängt nicht von (C, ε) ab.
Ist $(\bar{C}, \bar{\varepsilon})$ eine weitere proj. Aufl. von M, dann zeigt das Argument von eben angewendet auf $\mu = id_M$ dass es einen eind. Isom. $\eta_n : H_n(FC) \to H_n(F\bar{C})$ gibt.
Ist $(\bar{C}', \bar{\varepsilon}')$ weitere proj. Aufl. von M', dann erhalten wir einen Isom. $\eta'_n : H_n(FC') \to H_n(F\bar{C}')$ und $L_n F$ wird durch $\eta'_n (L_n F) \eta_n^{-1}$ ersetzt.

<u>Bem:</u> Offensichtlich ist $(L_n F) M \cong (L_{n-1} F) \pi(M)$.

Von nun an können wir annehmen, dass wir für M eine feste ~~proj~~. Aufl. gewählt haben, die wir aber nach Belieben wechseln können.

<u>Satz 2.32</u> Sei $F : R\text{-mod} \to Ab$ ein add. Funktor. Dann ex. für jede kurze ex. Seq. $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ verbindende Homom. $\Delta_n : L_n F M'' \to L_n F M'$, so dass die lange Homol. seq. ex ist

$$\ldots \to L_n F M \to L_n F M'' \xrightarrow{\Delta_n} L_{n-1} F M' \to L_{n-1} F M \to \ldots$$

<u>Bew:</u> Wir wollen proj. Aufl. (C', ε'), (C, ε), (C'', ε'') für $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ konstr. und Kettenhomom. $i: C' \to C$, $p: C \to C''$, ~~bzw.~~ so dass für jedes n $0 \to C_n' \to C_n \to C_n'' \to 0$ ex ist und das Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} C_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "i_0"'] & M' \arrow[d, "\alpha"] \\ C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "p_0"'] & M \arrow[d, "p"] \\ C_0'' \arrow[r, "\varepsilon''"] & M'' \end{tikzcd}$$

Seien (C', ε') und (C'', ε'') proj. Aufl. von M', M'', dann konstruieren wir (C, ε) induktiv wie folgt: ~~setze~~ ~~an der~~ $C_n = C_n' \oplus C_n''$. Dann ist C_n proj. und

$$0 \to C_n' \to C_n' \oplus C_n'' \to C_n'' \to 0$$

exakt.
Sind an der Stelle $n-1$ die Kerne gegeben durch K_n', K_n, K_n'', dann haben wir

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_n' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "g_n"] & C_n' \oplus C_n'' \arrow[r] \arrow[d, "f_n \oplus g_n"] & C_n'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "f_n"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_n' \arrow[r] & K_n \arrow[r] & K_n'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Da C_n'' proj. ist, ex $f_n: C_n'' \to K_n$. Nach dem 5er Lemma (ÜA, z.B) ist auch $f_n \oplus g_n$ epi.
Auf diese Weise erhalten eine proj. Aufl. (C, ε) für M, so dass $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ split ex. ist. Da F add ist, ist also

$$0 \longrightarrow FC' \longrightarrow FC \longrightarrow FC'' \longrightarrow 0$$

eine ex. Seq. von (nicht-ex) Komplexen. Nun folgt die Ex. der Δ_n aus Satz 2.22.

Bem: Mit inj. Auflösungen erhält man den entspr. Satz für rechts deriv. Funktoren.

Ist F kontravar. brauchen wir proj. Aufl. für rechts und inj. Aufl. für links-deriv Funktoren.

Die Hauptbeispiele sind Ext und Tor.