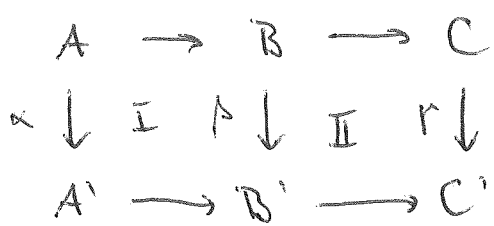


Lemma 2.23 Wenn das Diagramm kommutiert und ex. Reihen hat, dann ist $(\text{im } \lambda' \cap \text{im } \beta) / \text{im } \beta \lambda$

$$\cong \text{ker } \mu' \beta / \text{ker } \beta + \text{ker } \mu$$



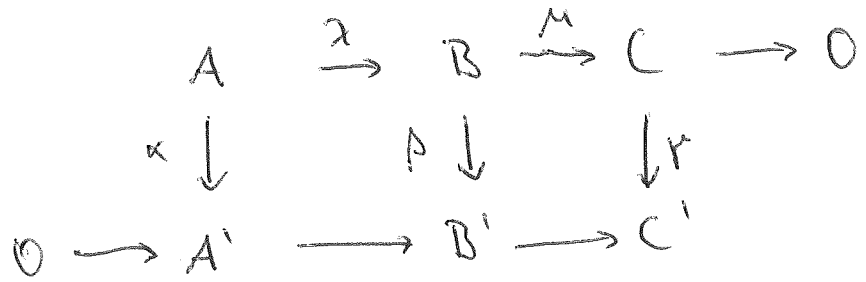
Bew: Es ist $\text{im } \beta \cap \text{im } \lambda' = \text{im } \beta \cap \text{ker } \mu'$
 $= \{ \beta(x) \mid \mu' \beta(x) = 0 \}$
 $= \beta(\text{ker } \mu' \beta)$

und $\text{im } \beta \lambda = \beta(\text{im } \lambda) = \beta(\text{ker } \mu) = \beta(\text{ker } \beta + \text{ker } \mu)$

Wegen $\text{ker } \beta \subseteq \text{ker } \mu' \beta$, $\text{ker } \beta \subseteq \text{ker } \beta + \text{ker } \mu$ folgt

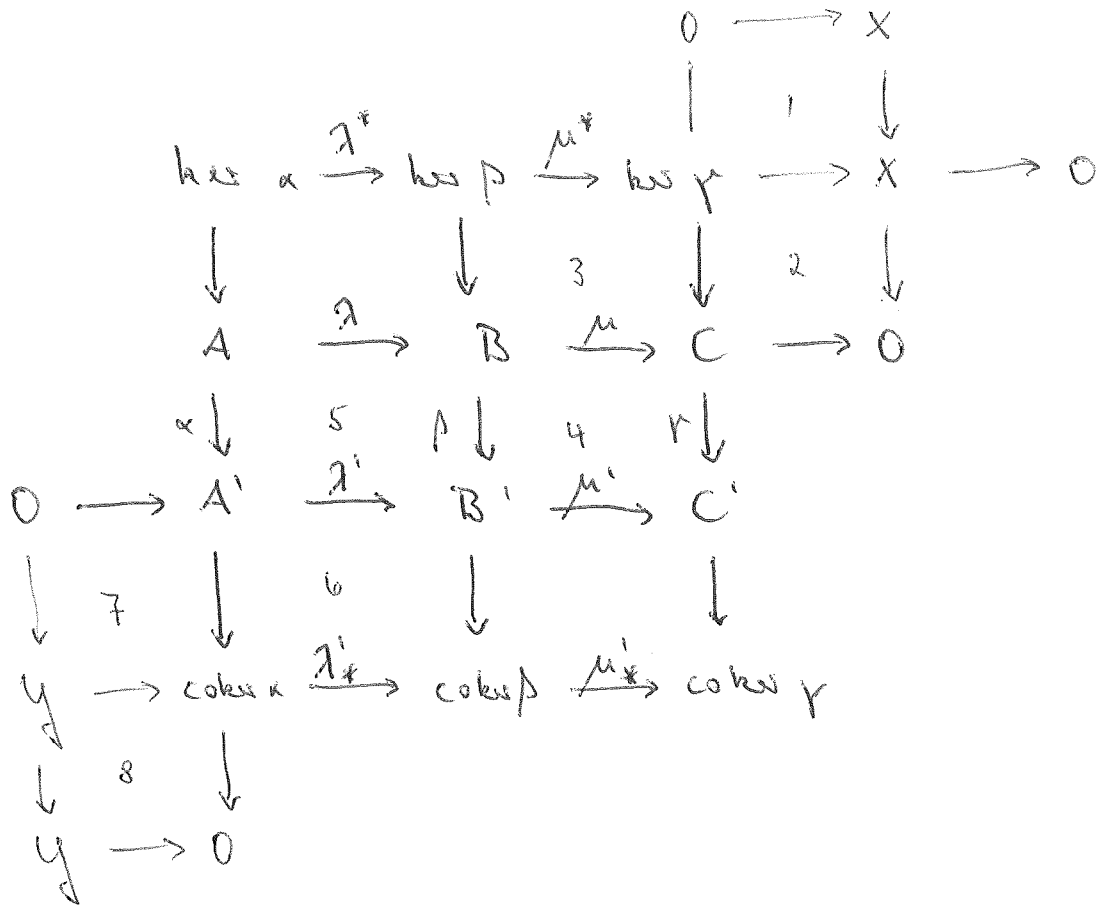
$\text{ker } (\mu' \beta) / \text{ker } \beta + \text{ker } \mu \cong \frac{\beta(\text{ker } \mu' \beta)}{\beta(\text{ker } \beta + \text{ker } \mu)} \cong \text{im } \lambda' \cap \text{im } \beta / \text{im } \beta \lambda$
i(I)'' =: *k(II)*

Lemma 2.24 Wenn das Diagramm kommutiert und ex. Reihen hat



dann kommutiert auch folgendes Diagr. mit ex. Reihen und Spalten, wobei λ', μ' und λ'_*, μ'_* die induz. Abb. sind.

Ist λ mono, dann auch λ' ; ist μ' epi, dann auch μ'_* .



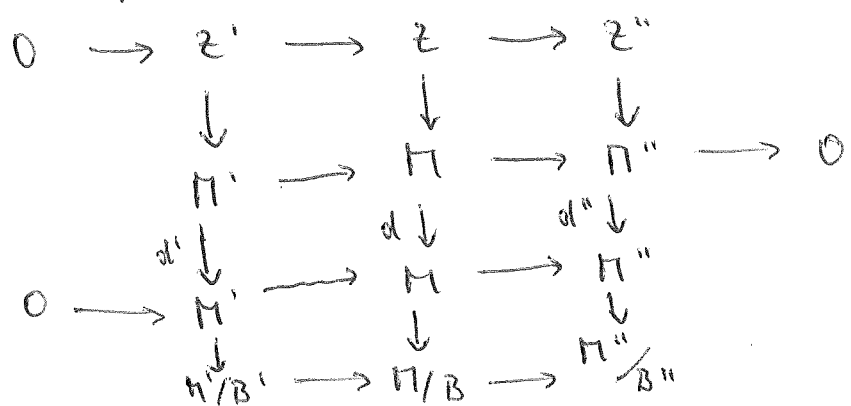
Bew Diagrammjagd...

Lemma 2.25 (Schlangenlemma) In der Situation von Lemma 2.24 ex $\Delta: \ker \gamma \rightarrow \text{coker } \alpha$, so dass die erste und letzte Reihe durch Δ zus ex. Seq. verbunden werden.

Bew: Es genügt z.z. $\text{coker } \mu^* \cong \ker \alpha'_*$.

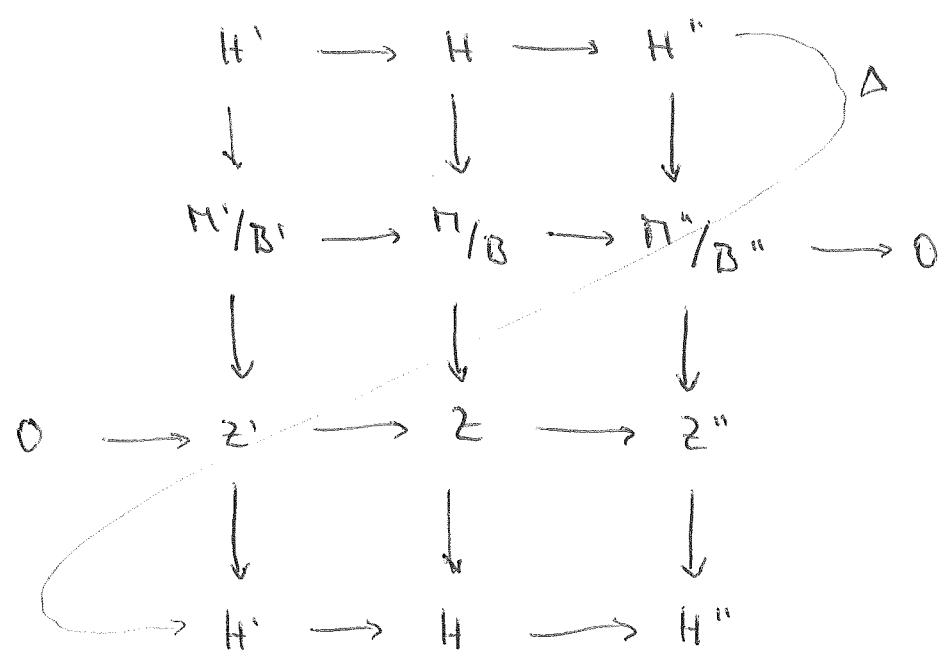
Schreibe $X = \text{coker } \mu^*$, $Y = \ker \alpha'_*$ und benutze 2.23
 $X \cong i(1) \cong k(2) \cong i(3) \cong \dots \cong k(8) \cong Y$

Bew von Satz 2.22: Wir können nach Lemma 2.24 folg. kommut. Diagramm mit ex. Reihen und Spalten betrachten



Wegen $d(\pi) \in Z$, $d(B) = 0$ induziert $d: \pi \rightarrow \pi$ einen Homom $\bar{d}: \pi/B \rightarrow Z$. Dann ist $\ker \bar{d} = \text{coker } \bar{d} = Z/B =: H$

Damit erhalten wir ein kommut. Diagramm



Dies ist nach Lemma 2.24 ex. in Zeilen und Spalten.

Nach dem Schlangenlemma gibt es einen Homom. $\Delta: H'' \rightarrow H$, der das Homol. Dreieck ex. macht.

Nach Konstruk. ist Δ natürl. in π . □

Spezialfall lange ex. Homologiefolge

Satz 2.26 Ist $0 \rightarrow C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \rightarrow 0$ eine ex. Folge von Komplexen, dann ex. verbindende Homom.

$\Delta_i: H_i(C'') \rightarrow H_{i-1}(C')$, so dass folg. Sequenz ex. ist.

$$\dots \xrightarrow{\tilde{\alpha}_{i+1}} H_{i+1}(C'') \xrightarrow{\Delta_{i+1}} H_i(C') \xrightarrow{\tilde{\alpha}_i} H_i(C) \xrightarrow{\tilde{\beta}_i} H_i(C'') \xrightarrow{\Delta_i} H_{i-1}(C') \rightarrow \dots$$

Def 2.27 (ii) Sind $(\Pi, d), (\Pi', d')$ Diffmodulen, dann heißen $f, g: \Pi \rightarrow \Pi'$ homotop, wenn es einen R -Hom. $s: \Pi \rightarrow \Pi'$ gibt mit $f - g = d's + sd$.

In dem Fall heißt s Homotopie, $f \approx g$.

(iii) Das Homom. $f: \Pi \rightarrow \Pi'$ heißt Kettenäquiv. (oder Homotopieäquiv.), wenn es einen Kettenmorph. $f': \Pi' \rightarrow \Pi$ gibt mit $ff' \approx \text{id}_{\Pi'}$, $f'f \approx \text{id}_{\Pi}$.

Lemma 2.28 Sind $f, g: \Pi \rightarrow \Pi'$ homotop, dann ist $\tilde{f} = H(f) = H(g) = \tilde{g}$. Ist f eine Kettenäquiv., dann ist $\tilde{f}: H(\Pi) \rightarrow H(\Pi')$ ein Isom.

Bew: Offensichtlich folgt die zweite Bemerkung aus der ersten. Wegen der Linearität genügt es z.z.:

$f \approx 0 \Rightarrow \tilde{f} = 0$: Ist $z \in Z(\Pi)$, dann ist $d(z) = 0$ und wegen $f = d's + sd$ folgt dann

$$f(z) = d's(z) + sd(z) = d's(z) \in B(\Pi')$$

Daher ist $f(Z(\Pi)) \subseteq B(\Pi')$, d.h. $\tilde{f} = 0$.

Bem: Für grad. Modulen müssen die Diff. abb. in Π und in Π' denselben Grad haben.

Wir werden sehen, dass je zwei proj. Auflösungen eines R -Moduls Kettenäquiv. sind, die Homol. gr. also nicht von der proj. Auflösung abhängen. Zuerst zeigen wir eine Universalitätseigenschaft.

Satz 2.29 Sind (C, ϵ) und (C', ϵ') Auflösungen von Π bzw Π' mit (C, ϵ) proj. und ist $\varphi: \Pi \rightarrow \Pi'$ ein Homom., dann ex. ein bis auf Kettenäquiv. eindeutiges Kettenhomom. $\kappa: C \rightarrow C'$, so dass das Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & \dots & \rightarrow C_0 & \xrightarrow{\epsilon} & \Pi & \rightarrow 0 \\
 & \searrow \kappa_i & \downarrow \kappa_{i-1} & & & \searrow \kappa_0 & & \downarrow \varphi & \\
 \rightarrow C'_i & \rightarrow & C'_{i-1} & \rightarrow & & \rightarrow C'_0 & \xrightarrow{\epsilon'} & \Pi' & \rightarrow 0
 \end{array}$$

Dann heißt κ ein Lift von φ , und je zwei Lifts sind homotop.

Bew: Wir konstruieren $\kappa_i: C_i \rightarrow C'_i$ mit $\kappa_{i-1} d_i = d'_i \kappa_i$ und $\epsilon' \kappa_0 = \varphi \epsilon$ mit Ind. über i und $\kappa_{-1} = \varphi$.

Ist κ_{i-1} konstruiert, dann haben wir das

Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \swarrow \kappa_i & C_i \\
 & \searrow & \downarrow d_i \\
 C'_i & \rightarrow & \text{im } d'_i \rightarrow 0
 \end{array}$$

und κ_i ex. weil

C_i proj. ist.

Für die Eindeutigkeit: Ist $\alpha + \beta$ ein weiteres Lift von φ , dann ist β ein Lift von 0 und wir können wie

oben $s_n: C_n \rightarrow C'_{n-1}$ finden mit

$$d'_n s_n + s_{n-1} d_n = \beta_n = (\alpha + \beta) - \alpha$$

und $d'_n s_0 = \beta_0$

Kor 2.30 Sind $(C, \epsilon), (C', \epsilon')$ proj. Aufl. eines Moduls M , dann sind C und C' Kettenäquiv. und haben daher isom. Homol. gruppen.

Nun können wir deriv. Funktoren definieren, nämlich die Homologiefunktoren angewendet auf den Komplex, den man aus einer proj. Auflösung durch Anwenden eines rechts-ex. Funktors erhält, speziell für $\text{Hom}_R(A, -)$ (bzw für links-ex. und $-\otimes_R A$). Ziel ist es z.z., dass diese Funktoren nur von M , nicht von der proj. Aufl. abhängen.

Def 2.31 Derivierte Funktoren. Sei $F: R\text{-mod} \rightarrow Ab$ ein add. Funktor. Sei M ein R -Modul, (C, ϵ) eine proj. Auflösung. Dann ist $(F(C), F(\epsilon))$ ein Komplex über FM und wir def. den n -ten links-deriv. Funktor $L_n F$ von F als

$$(L_n F) M = H_n(FC)$$

$$(L_n F)(\mu) = \widetilde{F(\kappa_n)} \text{ für } \mu \in \text{hom}_R(M, M')$$

κ Lift von μ auf $C \rightarrow C'$

Wir müssen zeigen, dass dies ein wohldef. Funktor $L_n F: R\text{-mod} \rightarrow Ab$ ist, also nicht von den Auflösungen (C, ϵ) von M und (C', ϵ') von M' abhängt.

Seien also $\mu: M \rightarrow M'$ und Aufl. $(C, \epsilon), (C', \epsilon')$ von M bzw M' gegeben. Dann liftet $\kappa: C \rightarrow C'$ so, dass $\mu \epsilon = \epsilon' \kappa_0$ gilt. Weil F ein add. Funktor ist, ist auch $F(\kappa): FC \rightarrow FC'$ so dass gilt

$$\begin{array}{ccccccc} F(\mu) F(\epsilon) = F(\epsilon') F(\kappa_0) & & & & & & \\ \rightarrow FC_1 & \xrightarrow{F d_1} & FC_0 & \xrightarrow{F(\epsilon_1)} & FM & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow F(\kappa_1) & \downarrow F(\kappa_0) & & \downarrow F(\mu) & & \\ \rightarrow FC'_1 & \rightarrow & FC'_0 & \rightarrow & FM' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Wir erhalten $\widetilde{F}(x_n): H_n(FC) \rightarrow H_n(FC')$ und müssen zeigen, dass das von Lift α unabh. ist: Ist β ein weiterer Lift von μ , dann sind α, β homotop, d.h. es ex. für $n \geq 0$ Homom. $s_n: C_n \rightarrow C'_n$, mit $\alpha_n - \beta_n = d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n$.
Weil F add. ist, gilt dann auch

$$F(x_n) - F(\beta_n) = F(d'_{n+1}) F(s_n) + F(s_{n-1}) F(d_n),$$

d.h. $F(x_n)$ und $F(\beta_n)$ sind homotop und daher

$$\widetilde{F}(x_n) = \widetilde{F}(\beta_n).$$

Nach z.z. $(L_n F) \Pi$ hängt nicht von (C, c) ab.

Ist (\bar{C}, \bar{c}) eine weitere proj. Aufl. von Π , dann zeigt das Argument von oben angewendet auf $\mu = id_\Pi$, dass es einen einkl. Isom. $\eta_n: H_n(FC) \rightarrow H_n(F\bar{C})$ gibt.

Ist (\bar{C}', \bar{c}') weitere proj. Aufl. von Π' , dann erhalten wir einen Isom. $\eta'_n: H_n(FC) \rightarrow H_n(FC')$ und $L_n F$ wird durch $\eta'_n (L_n F) \eta_n^{-1}$ ersetzt.

Bem: Offensichtlich ist $(L_n F) \Pi \cong (L_{n-1} F) \Pi(\Pi)$.

Von nun an können wir annehmen, dass wir für Π eine feste proj. Aufl. gewählt haben, die wir aber nach Belieben wechseln können.

Satz 2.32 Sei $F: R\text{-mod} \rightarrow Ab$ ein add. Funktor.

Dann ex. für jede kurze ex. Seq. $0 \rightarrow \Pi' \xrightarrow{\alpha} \Pi \xrightarrow{\beta} \Pi'' \rightarrow 0$ verbindende Homom. $\Delta_n: L_n F \Pi'' \rightarrow L_n F \Pi'$, so dass die lange Homol. seq. ex. ist

$$\dots \rightarrow L_n F \Pi \rightarrow L_n F \Pi'' \xrightarrow{\Delta_n} L_{n-1} F \Pi' \rightarrow L_{n-1} F \Pi \rightarrow \dots$$

Bew: Wir wollen proj. Aufl. (C', e') , (C, e) , (C'', e'') ⁻⁵¹⁻

für $0 \rightarrow \Pi' \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi'' \rightarrow 0$ konstr. und Kettenhomom. $i: C' \rightarrow C$, $p: C \rightarrow C''$, ~~konstr.~~ so dass

für jedes n $0 \rightarrow C_n' \rightarrow C_n \rightarrow C_n'' \rightarrow 0$ ex. ist

und das Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
 C_0' & \xrightarrow{e'} & \Pi' \\
 i_0 \downarrow & & \downarrow \kappa \\
 C_0 & \xrightarrow{e} & \Pi \\
 p_0 \downarrow & & \downarrow \rho \\
 C_0'' & \xrightarrow{e''} & \Pi''
 \end{array}$$

Seien (C', e') und (C'', e'') proj. Aufl. von Π' , Π'' , dann konstruieren wir (C, e) induktiv wie folgt; setze ~~an der~~ $C_n = C_n' \oplus C_n''$, Dann ist C_n proj. und

$$0 \rightarrow C_n' \rightarrow C_n' \oplus C_n'' \rightarrow C_n'' \rightarrow 0$$

exakt.

Sind an der Stelle $n-1$ die Kerne gegeben durch K_{n-1}' , K_{n-1} , K_{n-1}'' , dann haben wir

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & C_n' & \rightarrow & C_n' \oplus C_n'' & \rightarrow & C_n'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow f_n \oplus g_n & & \downarrow f_n \\
 0 & \rightarrow & K_n' & \rightarrow & K_n & \rightarrow & K_n'' \rightarrow 0
 \end{array}$$

Da C_n'' proj. ist, ex. $f_n: C_n'' \rightarrow K_n$. Nach dem 5er Lemma (ÜA, z.B.) ist auch $f_n \oplus g_n$ epi.

Auf diese Weise erhalten eine proj. Aufl. (C, e) für Π , so dass $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$ split ex. ist. Da F add. ist, ist also

$$0 \rightarrow FC' \rightarrow FC \rightarrow FC'' \rightarrow 0$$

eine ex. Seq. von (nicht-ex) Komplexen. Nun folgt die Ex. der Δ_n aus Satz 2.22.

Bem. Mit inj. Auflösungen erhält man den entspr. Satz für rechts-deriv. Funktoren.

Ist F kontrav. brauchen wir proj. Aufl. für rechts und inj. Aufl. für links-deriv. Funktoren.

Die Hauptbeispiele sind Ext und Tor.